前　言

高等代数是数学专业的重要基础课。高等代数主要包括多项式及线性代数两部分，而线性代数又是理、工、医、农、经济等学科的基础课。高等代数(包括线性代数)的特点是习题类型多，内涵丰富，变化复杂，难于概括和统一处理。有时尽管概念与理论已经学懂，但面对某些习题却感到无从下手。

本书编写的目的在于针对学生学习高等代数的困难，为他们提供在解题的方法与技巧方面的一把入门钥匙，也为那些准备报考硕士研究生的学生提供帮助，本书也可作为高等代数和线性代数的教师参考书。

本书分九章，每章包括基本知识、例题、习题、习题答案与提示等四节，其中基本知识一节简要地概括了该章的有关概念和定理，例题一节中二、三十道例题将本章的各种类型的方法对应的典型问题展示出来，其中不乏有多所高校的硕士生入学试题。许多例题提供多种解法，并且对于有启示的例题题后附有"点评"，起到画龙点睛的作用，在纷纭的论述与计算中，抽象出本质性的规律，并指出处理这类问题常用的方法，尽量有可操作性。习题一节包括了各类重要方法的练习题。对例题的各种方法掌握后，一般做本书的习题不会有太大的困难，何况每章的最后一节都编有习题的答案与提示。

本书可作为北京大学数学系编《高等代数》(第三版)和张禾瑞、郝钖新编《高等代数》(第四版)的学习参考书，其中北京大学数学系编《高等代数》(第三版)中增加了"双线性型与辛空间"一章，相应习题的内容将在本书修订时予以增补。

本书的编写人员是多年从事高等代数教学的教师，来自多所高等学校，书中许多素材来源于他们的教学经验与积累。本书第一章由李师正教授编写，第二章和第九章由高玉玲教授编写，第三章和第五章由李桂荣教授编写，第四章由刘学鹏教授编写，第六章和第七章由张玉芬教授编写，第八章由王彩云副教授编写，全书由李师正教授统稿。

由于编写人员水平所限。书中必然有不少错误和疏漏，恳请读者指正。

编者

2003 年 10 月

目　　录

第一章　多　项　式

§1.1　基 本 知 识

一、数域与数环

1. 1) 数域是一个由某些复数组成的集合 P,它包括 0 和 1,且 P 中的任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 P 中的数.

2) 常见的数域有有理数域 $\mathbf{Q}$、实数域 $\mathbf{R}$ 和复数域 $\mathbf{C}$.

2. 数环是一个由某些复数组成的非空集合 R,且 R 中任意两个数的和、差、积仍是 R 中的数.

3. 所有的数域都包含有理数域,数域总是数环.整数环是数环但不是数域.

二、一元多项式环

1. 设 P 为数域.如下的表达式称为数域 P 上的(一元)多项式:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in P$,$a_ix^i$ 称为$f(x)$的第 i 次项,a_i 称为i 次项系数.如果 $a_n\neq0$,则 $f(x)$的次数为 n,记为$\partial(f(x))=n$.零多项式无次数.

2. $f(x)$和 $g(x)$相等当且仅当对应系数相等.

3. 多项式的和、差运算归结为对应系数的和、差.多项式的乘法运算归结为逐项相乘后合并同类项.加法和乘法适合交换律、结合律、分配律、消去律.

4. 数域 P 上的所有(一元)多项式的集合称为 P 上的一元多项式环,记为 $P[x]$.

三、多项式的整除性

1. 带余除法:设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$g(x)\neq0$,则有唯一的 $q(x),r(x)\in P[x]$,使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

其中 $r(x)=0$ 或$\partial(r(x))<\partial(g(x))$,$r(x)$称为余式,$q(x)$称为商式.

2. 整除:设 $f(x),g(x)\in P[x]$.如果有 $q(x)\in P[x]$,使 $f(x)=$

$q(x)g(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为 $g(x)|f(x)$.

3. 最大公因式：

1) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，$d(x) \in P[x]$ 称为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式，如果 $d(x)|f(x)$ 且 $d(x)|g(x)$，同时如果 $h(x)|f(x)$ 且 $h(x)|g(x)$，则有 $h(x)|d(x)$.

2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$ 可通过辗转相除法求得，且可以表为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的组合，即有 $u(x), v(x) \in P[x]$，使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x),$$

其中 $u(x)$ 和 $v(x)$ 也通过辗转相除法求得. 反之，如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式，且 $d(x)$ 可表为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的上述组合形式，则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式.

3) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式在不计非零常数因子的意义下是唯一的. 用 $(f(x), g(x))$ 表示首项系数为 1 的最大公因式.

4. 互素：

1) $f(x), g(x) \in P[x]$ 称为互素，如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 除零次多项式外无公因式，记为 $(f(x), g(x)) = 1$.

2) $(f(x), g(x)) = 1$ 当且仅当存在 $u(x), v(x) \in P[x]$，使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

3) 如果 $(f(x), g(x)) = 1$，$f(x)|g(x)h(x)$，则 $f(x)|h(x)$.

4) 如果 $f_1(x)|g(x)$，$f_2(x)|g(x)$，$(f_1(x), f_2(x)) = 1$，则 $f_1(x)f_2(x)|g(x)$.

5. 不可约多项式：

1) 在数域 P 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $p(x)$ 称为 P 上的不可约多项式，如果它不能表为数域 P 上两个次数低于 $\partial(p(x))$ 的多项式之积.

一次多项式总是不可约的.

2) 设 $p(x)$ 为数域 P 上的不可约多项式，$f(x)$ 是 P 上任意多项式，则 $p(x)|f(x)$ 或 $(f(x), p(x)) = 1$ 恰有一式成立.

3) 设 $p(x)$ 为 P 上的不可约多项式，$f(x), g(x) \in P[x]$，$p(x)|f(x)g(x)$，则 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$ 至少有一式成立.

6. 因式分解及唯一性定理：数域 P 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 可以唯一地分解为数域 P 上一些不可约多项式的乘积. 所谓唯一性是指如果有两个分解式

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

那么必有 $s = t$，并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x) = c_i q_i(x), i = 1, 2, \cdots, s,$$

其中 $c_i(i = 1, 2, \cdots, s)$，为非零常数.

7. 重因式：不可约多项式 $p(x)$称为多项式 $f(x)$的 k 重因式，如果 $p^k(x)$ 整除 $f(x)$，但 $p^{k+1}(x)$不整除 $f(x)$. 当 $k=1$ 时，$p(x)$称为多项式 $f(x)$的单因式，当 $k>1$ 时，$p(x)$称为多项式 $f(x)$的重因式.

四、重要数域上的不可约多项式

1. 复数域上的不可约多项式是且仅是一次多项式.

2. 实数域上的不可约多项式是且仅是一次多项式和判别式 $\Delta<0$ 的二次多项式.

3. 有理数域上的不可约多项式：

1) 有理数域上的多项式可以表为一个有理数与一个本原多项式之积，且除了一个正负号外是唯一的. 本原多项式是指系数互素的整数系数多项式.

2) 高斯(Gauss)引理：两个本原多项式之积仍是本原多项式.

3) 非零的整数系数多项式如能分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，则能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

4) 艾森斯坦(Eisenstein)判别法：设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

是一个整数系数多项式，如果有一个素数 p，满足条件：p 整除 $a_{n-1},\cdots,a_0$，p 不整除 a_n，p^2 不整除 a_0，那么 $f(x)$是有理数域上的不可约多项式.

五、多项式的根

1. 余数定理与因式定理：

1) 余数定理：用 $x-a$ 去除多项式 $f(x)$，其余式为常数 $f(a)$.

2) 因式定理：a 是多项式 $f(x)$的根当且仅当 $x-a$ 整除 $f(x)$.

2. 重根：

1) 如果 $x-a$ 是 $f(x)$的 k 重因式，则 a 称为 $f(x)$的 k 重根.

2) 数域 P 上 n 次多项式在 P 中的根不多于 n 个(重根按重数计算).

3. 有理根：设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，是一个整数系数多项式，$r/s$ 是 $f(x)$的有理根，$(r,s)=1$，则 $s\mid a_n$，$r\mid a_0$. 当 $a_n=1$ 时，$f(x)$的有理根都是整数，且为 a_0 的因子.

4. 根与系数的关系：设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\in P[x]$，$f(x)$在数域 P 中有 n 个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则有

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-a_1,\\ \alpha_1 a_2+\alpha_2 a_3+\cdots+\alpha_{n-1}a_n=a_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum \alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\cdots\alpha_{k_i}=(-1)^i a_i(\text{所有可能的 } i \text{ 个根之积的和}),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n a_n.\end{cases}$$

*六、多元多项式与对称多项式

1. 设 P 是一个数域，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是文字，形如 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的式子，其中 $a\in P,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是非负整数，称为 P 上的一个 n 元单项式.

2. 数域 P 上有限个 n 元单项式的和，称为数域 P 上的一个 n 元多项式.

3. 数域 P 上全体 n 元多项式的集合称为数域 P 上 n 元多项式环.

4. 数域 P 上的一个 n 元多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$，如果任意交换两个文字的位置，多项式不变，则称为对称多项式.

5. 下面的 n 个多项式称为初等对称多项式：

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n.\end{cases}$$

6. 对称多项式基本定理：数域 P 上的任意 n 元对称多项式都能唯一地表为初等对称多项式的多项式.

§1.2 例　　题

例 1　写出包含 $\sqrt{2}$ 的最小数环和最小数域.

解　令 $A=\{2m+n\sqrt{2}\mid m,n\in\mathbf{Z}\}$. A 是一个数环，事实上，$A\neq\varnothing$. $\forall\, 2m+n\sqrt{2},2m_1+n_1\sqrt{2}\in A$，则

$$(2m+n\sqrt{2})\pm(2m_1+n_1\sqrt{2})=2(m\pm m_1)+(n\pm n_1)\sqrt{2}\in A,$$

$$(2m+n\sqrt{2})(2m_1+n_1\sqrt{2})=2(2mm_1+nn_1)+(2mn_1+2m_1n)\sqrt{2}\in A,$$

显然 $\sqrt{2}=0+1\sqrt{2}\in A$. 另一方面，如 B 为数环，且 $\sqrt{2}\in B$，则

$$\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2}\in B,\ -\sqrt{2}=0-\sqrt{2}\in B,$$

$$(-\sqrt{2})+\cdots+(-\sqrt{2})\in B,$$

即 $n\sqrt{2}\in B$，$n\in\mathbf{Z}$. 而 $2=(\sqrt{2})^2\in B$，推出全体偶数在 B 中，因而 $A\subseteq B$. A 是包含$\sqrt{2}$的最小数环.

令 $P=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$. P 为数域，事实上，$0,1\in P$，$\forall\, a+b\sqrt{2}$，$c+d\sqrt{2}\in P$，则

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in P,$$
$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in P.$$

设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$，

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{1}{c^2-2d^2}[(ac-2bd)+(bc-ad\sqrt{2})].$$

设 F 为含$\sqrt{2}$的任意数域，易见 $P\subseteq F$，即 P 是含$\sqrt{2}$的最小数域.

点评 包含$\sqrt{2}$的最小数环是指一个数环 A，适合$\sqrt{2}\in A$，且如果一个数环 B 包含$\sqrt{2}$，则 $A\subseteq B$. 包含$\sqrt{2}$的最小数域类似.

例 2 设 $f(x)$是数域 P 上的多项式，如 $\forall\, a,b\in P$，都有

$$f(a+b)=f(a)+f(b),$$

则 $f(x)=kx$，$k\in P$.

证明 证法 1 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，则 $\forall\, u\in P$，有

$$f(2u)=f(u+u)=f(u)+f(u)=2f(u),$$
$$\begin{aligned}0=f(2u)-2f(u)&=2^na_nu^n+\cdots+2a_1u+a_0-2a_nu^n-\cdots-2a_1u-2a_0\\&=(2^n-2)a_nu^n+\cdots+(2^2-2)a_2u^2-a_0,\end{aligned}$$

于是 $a_n=\cdots=a_2=a_0=0$. $f(x)=a_1x$. 令 $k=a_1$，则 $f(x)=kx$.

证法 2 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，由于 $f(t)=f(t+0)=f(t)+f(0)$，$\forall\, t\in P$ 成立. 于是 $f(0)=0$，即 $a_0=0$，

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x.$$

$f(2)=f(1+1)=2f(1)$，$f(3)=f(2)+f(1)=3f(1)$，$\cdots$，$f(n)=nf(1)$.

设 $f(1)=k$，得

$$\begin{cases}f(1)=a_1+a_2+\cdots+a_n=k,\\ f(2)=2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=2k,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ f(n)=na_1+n^2a_2+\cdots+n^na_n=nk,\end{cases}\tag{1}$$

线性方程组(1)的系数行列式是范德蒙行列式，不等于 0，(1)只有唯一解：

$$a_1=k,\ a_2=\cdots=a_n=0.$$

所以 $f(x)=kx$，$k\in P$.

点评　本题是由多项式的性质来刻画多项式的一个典型问题. 证法 1 通过性质构造一个多项式恒等于零,推出系数全为零,得出结论. 证法 2 利用解方程组得出.

例 3　证明实数域上多项式

$$f(x)=x^3+px^2+qx+r$$

是实数域上一个多项式的立方当且仅当 $p=3\sqrt[3]{r}$, $q=3\sqrt[3]{r^2}$(开方为实 3 次方根)

证明　设 $f(x)=(g(x))^3$,则 $g(x)$为一次多项式. 设 $g(x)=ax+b$,于是

$$x^3+px^2+qx+r=(ax+b)^3=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3.$$

对比系数,得 $a^3=1, 3a^2b=p, 3ab^2=q, b^3=r$.

解得 $a=1, p=3b, q=3b^2, b=\sqrt[3]{r}$. 得出 $p=3\sqrt[3]{r}, q=3\sqrt[3]{r^2}$.

反之,设条件成立. $p=3\sqrt[3]{r}, q=3\sqrt[3]{r^2}$. 则显然

$$f(x)=(x+\sqrt[3]{r})^3.$$

点评　这类问题解法基于待定系数法,即两多项式相等当且仅当对应系数相等,转换为方程组求解.

例 4　当且仅当 k,l,m 适合什么条件时, $x^2+kx+1\mid x^4+lx^2+m$?

解　解法 1　用带余除法,可得

$$\begin{aligned}x^4+lx^2+m&=(x^2+kx+1)(x^2-kx+(k^2+l-1))+\\&\quad k(2-l-k^2)x+(m+1-l-k^2).\end{aligned}$$

因而当且仅当

$$\begin{cases}k(2-l-k^2)=0,\\m+1-l-k^2=0\end{cases}\tag{1}$$

时,

$$x^2+kx+1\mid x^4+lx^2+m.$$

条件(1)等价于

$$\begin{cases}k=0,\\l=m+1,\end{cases}\text{或}\begin{cases}m=1,\\l=2-k^2.\end{cases}$$

解法 2　记 $x^4+lx^2+m=(x^2+kx+1)(x^2+px+q)$,

比较系数,得方程组

$$\begin{cases}k+p=0,\\kp+q+1=l,\\kq+p=0,\\q=m.\end{cases}$$

由 $p=-k, q=m$,得 $k(m-1)=0$,即 $k=0$ 或 $m=1$. 如 $k=0$,则 $l=m+1$;若

$m=1$,则 $l=2-k^2$,即当且仅当

$$\begin{cases}k=0,\\ l=m+1,\end{cases}\text{或}\begin{cases}m=1,\\ l=2-k^2\end{cases}$$

时,

$$x^2+kx+1\mid x^4+lx^2+m.$$

点评 证明一个多项式 $g(x)$整除一个多项式 $f(x)$,对于其系数已具体给出时,通常可采用带余除法:$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$,整除性等价于余式 $r(x)=0$.或利用待定系数法,形式地写出

$$f(x)=q(x)g(x),\tag{2}$$

$\partial(q(x))=\partial(f(x))-\partial(g(x))$,$q(x)$的系数为待定常数,比较(2)两端各项系数,解出方程组,当且仅当该方程组在相应的数域内有解时,$g(x)\mid f(x)$.

例 5 若$(x-1)\mid g(x^n)$,求证$(x^n-1)\mid g(x^n)$.

证明 证法 1 因为

$$(x-1)\mid g(x^n),$$

由因式定理得 $g(1^n)=0$,即 $g(1)=0$,故

$$(x-1)\mid g(x),$$

于是存在多项式 $h(x)$,使

$$(x-1)h(x)=g(x).$$

有 x^n 代x,得

$$(x^n-1)h(x^n)=g(x^n).$$

即

$$(x^n-1)\mid g(x^n).$$

证法 2 x^n-1 有 n 个不同的复根,即全部 n 次单位根$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.而

$$g(\alpha_i^n)=g(1)=g(1^n)=0,i=1,2,\cdots,n.$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是$g(x^n)$的根,因而

$$(x^n-1)\mid g(x^n).$$

点评 证明一个多项式 $g(x)$整除多项式 $f(x)$,在 $f(x)$和 $g(x)$的系数未具体给出时,可采用以下方法:

如果 $g(x)$无重根,且 $g(x)$的复根全部都是 $f(x)$的根,则 $g(x)\mid f(x)$.

事实上,设 $g(x)$的根是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$,则可表为

$$g(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k).$$

因

$$f(\alpha_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,k.$$

故

$$(x-\alpha_i)\mid f(x),\quad i=1,2,\cdots,k,$$

由于 $x-\alpha_1,x-\alpha_2,\cdots,x-\alpha_k$ 两两互素,故

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)\mid f(x),$$

即 $g(x)\mid f(x)$.

例 6 设 n 为非负整数,求证$(x^2+x+1)\mid[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]$.

证明 证法 1 x^2+x+1 的根为 $\alpha_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$和 $\alpha_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,它们是三次单位根,将 $\alpha_i,i=1,2$ 代入 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$后,得

$$\alpha_i^{n+2}+(\alpha_i+1)^{2n+1}=\alpha_i^{n+2}+(-\alpha_i^2)^{2n+1}=\alpha_i^{n+2}-\alpha_i^{4n+2}=\alpha_i^{n+2}(1-\alpha_i^{3n})=0,i=1,2.$$

因而整除性成立.

证法 2 对 n 进行归纳.

当 $n=0$ 时,显然成立.

设 $n=k$ 时,结论成立,推证当 $n=k+1$ 时也成立.这时

$$\begin{aligned}x^{k+3}+(x+1)^{2k+3}&=x^{k+3}+(x+1)^2(x+1)^{2k+1}\\&=x^{k+3}+(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}+x(x+1)^{2k+1}\\&=x[x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}]+(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}\end{aligned}$$

即

$$(x^2+x+1)\mid[x^{k+3}+(x+1)^{2k+3}].$$

于是结论成立.

点评 证法 1 与例 5 中证法 2 道理相同,因 x^2+x+1 无重根,其根都是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$的根,从而推出结论.证法 2 使用归纳法,适合某些含整数 n 的证明题.

例 7 求证$(x^2+1)\mid(x^7+x^6+\cdots+x+1)$.

证明 证法 1 在实数域上 x^2+1 不可约,但 x^2+1 与 $x^7+x^6+\cdots+x+1$ 显然有公共复根 i,它们在复数域上有公因式 $x-\mathrm{i}$,因而不互素,所以在实数域上也不互素.由不可约多项式的性质,x^2+1 整除 $x^7+x^6+\cdots+x+1$.

证法 2 用带余除法,余式等于零.

证法 3 x^2+1 的根为$\pm\mathrm{i}$,无重根,$\pm\mathrm{i}$ 也是 $x^7+x^6+\cdots+x+1$ 的根,因而求证的整除性成立.

点评 证法 2 和证法 3 前面已讲过.

证法 1 主要利用不可约多项式的性质.不可约多项式 $p(x)$与一个多项式 $f(x)$之间只有两个关系,即 $p(x)\mid f(x)$或$(p(x),f(x))=1$,如果否定了后者,就可推出整除性.而 $p(x)$与 $f(x)$不互素当且仅当在复数域中它们有公共根.

例 8 设 $f(x),g(x),h(x)$是数域 P 上的多项式,且有

$$(x+a)f(x)+(x+b)g(x)=(x^2+c)h(x), \qquad (1)$$

$$(x-a)f(x)+(x-b)g(x)=(x^2+c)h(x), \qquad (2)$$

其中 $a,b,c\in P, a\neq 0, a\neq b, c\neq 0$. 求证 x^2+c 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式.

证明 由(1) - (2)得, $af(x)+bg(x)=0$,

$$f(x)=-\frac{b}{a}g(x),$$

(1) + (2), 得

$$2(x^2+c)h(x)=x(f(x)+g(x))=\frac{a-b}{a}xg(x),$$

即

$$(x^2+c)\mid xg(x),$$

但显然 $(x^2+c,x)=1$, 故

$$(x^2+c)\mid g(x),$$

由此,

$$(x^2+c)\mid f(x).$$

点评 这一证明基于互素多项式一个重要性质, 即如果 $(f(x),g(x))=1$, $f(x)\mid g(x)h(x)$, 则 $f(x)\mid h(x)$.

例 9 设 $g_m(x)=(x+1)^m-x^m-1$, 当 m 为何正整数时 $(x^2+x+1)^2\mid g_m(x)$?

解 x^2+x+1 的根为三次单位根 α_1,α_2 (见例 6), 由于 $\alpha_i+1=-\alpha_i^2, i=1,2$. 如果有上述整除关系, 则

$$(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\mid g_m(x).$$

即 $g_m(x)$ 有重根 α_1,α_2,

$$g_m'(x)=m(x+1)^{m-1}-mx^{m-1},$$

则有

$$g_m(\alpha_1)=g_m(\alpha_2)=0, \quad g'_m(\alpha_1)=g'_m(\alpha_2)=0.$$

而对于 $i=1,2$,

$$g_m(\alpha_i)=(\alpha_i+1)^m-\alpha_i^m-1=(-\alpha_i^2)^m-\alpha_i^m-1=(-1)^m\alpha_i^{2m}-\alpha_i^m-1,$$

$$g_m'(\alpha_i)=m(-\alpha_i^2)^{m-1}-m\alpha_i^{m-1}=m\alpha_i^{m-1}[(-1)^{m-1}\alpha_i^{m-1}-1].$$

因而应有

$$(-1)^{m-1}\alpha_i^{m-1}=1,$$

则 $\alpha_i^{m-1}=1$ (因 $\alpha_i^{m-1}\neq -1$), $(-1)^{m-1}=1$, 即 $3\mid m-1, 2\mid m-1$, 因而 $m=6k+1$, k 为非负整数.

反之, 设 $m=6k+1$, k 为非负整数. 则对于 $i=1,2$, 由于

$$\alpha_i^3=1,$$

$$g_m(\alpha_i)=(-1)^m\alpha_i^{2m}-\alpha_i^m-1=-\alpha_i^{2m}-\alpha_i^m-1=-\alpha_i^2-\alpha_i-1=0.$$

$$g'_m(\alpha_i)=m\alpha_i^{m-1}[(-1)^{m-1}\alpha_i^{m-1}-1]=0.$$

因此 α_1,α_2 为 $g_m(x)$的重根,而$(x-\alpha_1)^2$ 与$(x-\alpha_2)^2$ 互素,因而$(x^2+x+1)^2=(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2$ 整除$g(x)$.所以,当且仅当 $m=6k+1$ 时,$(x^2+x+1)\mid g_m(x)$.

点评 这里利用了互素多项式的一个重要性质:如果 $f_1(x)\mid g(x)$, $f_2(x)\mid g(x)$, $(f_1(x),f_2(x))=1$,则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.这在证明整除性质上是很重要的.

本题使用了证明一次式的方幂$(x-\alpha)^k$ 整除某多项式$f(x)$的方法,即只须证明 $f(\alpha)=0,f'(\alpha)=0,\cdots,f^{(k)}(\alpha)=0$,这时 α 为$f(x)$的至少 k 重根.

例 10 设 a 为$f(x)$的 3 重根,$g(x)=f(x)+(a-x)f'(x)$,证明 a 是$g(x)$的 3 重根.

证明 设 $f(x)=(x-a)^3f_1(x),f_1(a)\neq0$,

$$f'(x)=3(x-a)^2f_1(x)+(x-a)^3f'_1(x),$$

$$g(x)=(x-a)^3f_1(x)-(x-a)f'(x)=(x-a)^3[-2f_1(x)-(x-a)f'_1(x)].$$

因而

$$(x-a)^3\mid g(x).$$

但如果$(x-a)^4\mid g(x)$,则

$$(x-a)\mid[-2f_1(x)-(x-a)f'_1(x)],$$

与 $f_1(a)\neq0$ 矛盾.故$(x-a)^4$ 不整除 $g(x)$,a 为$g(x)$的 3 重根.

点评 为证 a 是$g(x)$的 3 重根,须证$(x-a)^3\mid g(x)$,$(x-a)^4$ 不整除$g(x)$.

例 11 求证:数域 P 上的n 次多项式$f(x)$适合 $f'(x)\mid f(x)$当且仅当

$$f(x)=a_0(x-x_0)^n,a_0\in P.$$

证明 证法 1 充分性.如 $f(x)=a_0(x-x_0)^n$,则 $f'(x)=na_0(x-x_0)^{n-1}$.显然 $f'(x)\mid f(x)$.

必要性.设 $f'(x)\mid f(x)$,如 $f(x)=0$,可取 $a_0=0$;设 $f(x)\neq0$,则 $f'(x)$除$f(x)$的商应为一次多项式,首项系数为$\frac{1}{n}$,故

$$nf(x)=(x-x_0)f'(x).$$

两端求导,得 $nf'(x)=f'(x)+(x-x_0)f''(x)$,或

$$f(x)=\frac{x-x_0}{n}f'(x)=\frac{(x-x_0)^2}{n(n-1)}f''(x)=\cdots=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x)=a_0(x-x_0)^n,$$

其中 a_0 为 $f(x)$的首项系数.

证法 2　充分性同证法 1.

必要性　如 $f(x)=0$,显然结论成立. 设 $f'(x)\mid f(x)$, $\partial(f(x))=\partial(f'(x))+1$,得

$$f(x)=a_1(x-x_0)f'(x),a_1,x_0\in P.$$

于是有$(f(x),f'(x))=a_2f'(x)$,其中 a_2 为 $f'(x)$的首项系数的倒数. 因而

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=\frac{a_1}{a_2}(x-x_0).$$

因$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$与 $f(x)$有相同的不可约因式,所以 $f(x)$的不可约因式只能是 $x-x_0$ 及它的非零常数倍. 而 $f(x)$的次数为 n,所以 $f(x)=a_0(x-x_0)^n$, a_0 为 $f(x)$的首项系数.

点评　证法 1 基于待定系数法及求导法则,证法 2 基于待定系数法及 $f(x)$与$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$有相同的不可约因式的性质.

例 12　求证$(f(x),g(x))=1$ 当且仅当$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$.

证明　证法 1　设$(f(x),g(x))=1$,假如 $f(x)+g(x)$与 $f(x)g(x)$不互素,则有不可约公因式 $p(x)$,因 $p(x)\mid f(x)g(x)$,则 $p(x)\mid f(x)$或 $p(x)\mid g(x)$,不妨设 $p(x)\mid f(x)$,又因 $p(x)\mid(f(x)+g(x))$,推出 $p(x)\mid g(x)$,因而 $p(x)$是 $f(x)$和 $g(x)$的公因式,与 $f(x),g(x)$互素矛盾. 因而 $f(x)+g(x)$与 $f(x)g(x)$互素.

反之,设$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$,则有 $u(x),v(x)$使

$$(f(x)+g(x))u(x)+f(x)g(x)v(x)=1,$$

即

$$f(x)u(x)+g(x)(u(x)+f(x)v(x))=1,$$

因而

$$(f(x),g(x))=1$$

证法 2　设$(f(x),g(x))=1$,则有 $u(x),v(x)$使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

因而

$$u(x)(f(x)+g(x))+(v(x)-u(x))g(x)=1,$$
$$(f(x)+g(x),g(x))=1,$$

同样

$$(f(x)+g(x),f(x))=1,$$

所以

$$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1,$$

反之,设结论成立,则有多项式 $u(x),v(x)$,使

$$u(x)(f(x)+g(x))+v(x)(f(x)g(x))=1,$$

于是$(u(x)+v(x)g(x))f(x)+u(x)g(x)=1$.因而$(f(x),g(x))=1$.

点评 证明两个多项式 $f(x)$和 $g(x)$互素,可利用其充要条件:存在 $u(x)$和 $v(x)$使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.也可用反证法,即假设存在不可约的公因式,利用不可约多项式的性质,推出结果.

例 13 设 $f(x)=x^{2n}+2x^{n+1}-23x^n+x^2-22x+90$, $g(x)=x^n+x-6(n>2)$,求证:$(f(x),g(x))=1$.

证明 用 $g(x)$除 $f(x)$,得

$$f(x)=g(x)(x^n+x-17)+(x-12),$$

$g(12)\neq0$,故$(g(x),x-12)=1$,因而$(f(x),g(x))=1$.

点评 这里用的是证明互素性的另一个方法.要证 $f(x)$和 $g(x)$互素,可用其中之一除另一个,得余式 $r(x)$.这时,$f(x)$和 $g(x)$的所有公因式也是 $g(x)$和 $r(x)$的公因式,因而只须证后者互素.本题中,$r(x)$是一次式,总是不可约的,不可约多项式与任一多项式的关系只有两种:要么整除,要么互素,可以用因式定理验证是否整除.否定了整除即可肯定互素.

例 14 求 t,使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

解 $f'(x)=3x^2-6x+t$,选 t 使f 与f'不互素,即 f 与f'有公共根.

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)f'(x)+\left(\frac{1}{3}t-1\right)(2x+1).$$

$f(x)$与 $f'(x)$的公共根,也是 $r(x)=\left(\frac{1}{3}t-1\right)(2x+1)$的根.

如$\frac{1}{3}t-1\neq0$,则 $x=-\frac{1}{2}$是 $r(x)$的根.$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{4}+3+t=0$, $t=-\frac{15}{4}$.当$\frac{1}{3}t-1=0$,即 $t=3$ 时,$r(x)=0$, $f'(x)\mid f(x)$.$f'(x)$与 $f(x)$不互素.

总之,当且仅当 $t=3$ 或$-\frac{15}{4}$时,$f(x)$有重根.

点评 一个多项式有重根,当且仅当多项式 f 与它的导数f'不互素,因而在复数域中有公根,可以通过带余除法验证余式的根.

例 15 求证:多项式 $f(x)=x^n+ax^{n-m}+b(n>m>0)$没有重数高于 2 的非零复数根.

证明: $f'(x)=x^{n-m-1}(nx^m+(n-m)a)$.如 $a\neq0$,则 $f'(x)$的非零根是 $\frac{-(n-m)a}{n}$的 m 次方根,这些根都是单根,所以 f'没有非零的重根,因而 $f(x)$

没有高于二重的非零根.

如果 $a=0$,则 $f(x)=x^n+b$.这是,若 $b=0$,则只有根零.若 $b\neq 0$,则 $f(x)$ 的根只有单根,这些单根由 $-b$ 的 n 次方根组成.当然也没有高于二重的非零根.

因而 $f(x)$没有高于二重的非零根.

例 16 记 $d(x)=(f(x),g(x))$,求证 $d(x^n)=(f(x^n),g(x^n))$.

证 由于已知条件,存在 $u(x),v(x)$,使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x) \tag{1}$$

由 x^n 代x,得

$$d(x^n)=u(x^n)f(x^n)+v(x^n)g(x^n).$$

又显然

$$d(x^n)\mid f(x^n),d(x^n)\mid g(x^n),$$

因而

$$d(x^n)=(f(x^n),g(x^n)).$$

点评 由 $d(x)=(f(x),g(x))$,可以推知,存在多项式 $u(x),v(x)$,使(1)成立.另一方面,但仅有(1)式尚不能得出结论.而如果同时 $d(x^n)$是 $f(x^n)$ 和 $g(x^n)$的公因式,则 $d(x^n)$是 $f(x^n)$和 $g(x^n)$的最大公因式.

例 17 将 $f(x)$简记为 f.设 f_1,f_2,g_1,g_2 为非零多项式,且$(f_i,g_j)=1$. $i,j=1,2$.求证:$(f_1g_1,f_2g_2)=(f_1,f_2)(g_1,g_2)$.

证明 证法 1 记$(f_1,f_2)=d_1$,$(g_1,g_2)=d_2$,$(f_1g_1,f_2g_2)=d$.显然 $d_1\mid d$,$d_2\mid d$.由于$(f_1,g_1)=1$,故$(d_1,d_2)=1$.因而 $d_1d_2\mid d$.

另一方面,由于 $d\mid f_1g_1$,可写 $d=fg$,$f\mid f_1$,$g\mid g_1$.

因为$(f_1,g_2)=1$,故$(f,g_2)=1$.由 $f\mid f_2g_2$,得 $f\mid f_2$.又因 $f\mid f_1$,知 $f\mid d_1$.同理 $g\mid d_2$.因而

$$d=fg\mid d_1d_2.$$

由 d,d_1,d_2 首项系数均为 1,故 $d=d_1d_2$.

证法 2 令$(f_1,f_2)=d_1$,$(g_1,g_2)=d_2$,得知 $d_1d_2\mid f_1g_1$,$d_1d_2\mid f_2g_2$.由于存在多项式 u_1,v_1,u_2,v_2,使

$$u_1f_1+v_1f_2=d_1, \tag{1}$$

$$u_2g_1+v_2g_2=d_2, \tag{2}$$

$$(f_i,g_j)=1 \quad i,j=1,2.$$

故

$$(f_1f_2,g_1g_2)=1,$$

从而存在多项式 u,v,使

$$uf_1f_2+vg_1g_2=1. \tag{3}$$

(1)(2)(3)相乘得

$$(u_1u_2uf_1f_2+u_2v_1uf_2^2+u_1u_2vg_1g_2+u_1v_2vg_2^2)f_1g_1+$$
$$(u_1v_2uf_1^2+uv_1v_2f_1f_2+u_2v_1vg_1^2+v_1v_2vg_1g_2)f_2g_2=d_1d_2.$$

又显然

$$d_1d_2\mid f_1g_1, d_1d_2\mid f_2g_2.$$

故

$$d_1d_2=(f_1g_1,f_2g_2).$$

点评 证法1是利用定义证明的.先证 d_1d_2 整除 f_1g_1 和 f_2g_2 的最大公因式 d,再证明 $d\mid d_1d_2$.

证法2基于 $d(x)=(f(x),g(x))$ 当且仅当 $d(x)\mid f(x)$ 且 $d(x)\mid g(x)$,同时可表 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$ 这一性质.证明过程中利用互素及整除的有关性质.

例18 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数域 P 上的多项式,$a_1,a_2,a_3,a_4\in P$,且 $a_1a_4-a_2a_3\neq0$,求证:

$$(a_1f(x)+a_2g(x),a_3f(x)+a_4g(x))=(f(x),g(x)).$$

证明 证法1 设 $(f(x),g(x))=d(x)$.首先,显然 $d(x)$ 是 $a_1f(x)+a_2g(x)$ 和 $a_3f(x)+a_4g(x)$ 的一个公因式.

其次,设 $h(x)$ 是 $a_1f(x)+a_2g(x)$ 和 $a_3f(x)+a_4g(x)$ 的任意公因式,如果

$$\begin{cases}a_1f(x)+a_2g(x)=t(x)h(x) & (1)\\ a_3f(x)+a_4g(x)=s(x)h(x) & (2)\end{cases}$$

(1)×$(-a_3)$+(2)×a_1,得

$$(a_1a_4-a_2a_3)g(x)=(-a_3t(x)+a_1s(x))h(x).$$

由于 $a_1a_4-a_2a_3\neq0$,所以 $h(x)\mid g(x)$.

同样可证 $h(x)\mid f(x)$,因而 $h(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个公因式,故 $h(x)\mid d(x)$.于是

$$(a_1f(x)+a_2g(x),a_3f(x)+a_4g(x))=d(x).$$

证法2 设 $(f(x),g(x))=d(x)$,于是存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x).$$

$d(x)$ 显然整除 $a_1f(x)+a_2g(x)$ 和 $a_3f(x)+a_4g(x)$.因 $a_1a_4-a_2a_3\neq0$,易见

$$\frac{1}{a_1a_4-a_2a_3}(a_4u(x)-a_3v(x))(a_1f(x)+a_2g(x))+$$

$$\frac{1}{a_1a_4-a_2a_3}(a_1v(x)-a_2u(x))(a_3f(x)+a_4g(x))$$
$$=u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x).$$

令 $U(x)=\frac{1}{a_1a_4-a_2a_3}(a_4u(x)-a_3v(x)),V(x)=\frac{1}{a_1a_4-a_2a_3}(a_1v(x)-a_2u(x))$

则显然

$$U(x)(a_1f(x)+a_2g(x))+V(x)(a_3f(x)+a_4g(x))=d(x).$$

因而

$$(a_1f(x)+a_2g(x),a_3f(x)+a_4g(x))=d(x).$$

点评 证法1利用最大公因式定义证明.证法2利用 $d(x)=(f(x),g(x))$当且仅当 $d(x)$是 $f(x)$和 $g(x)$的公因式且 $d(x)$表为 $f(x)$和 $g(x)$的组合这一性质.

例19 设 $f(x)$为次数大于零的首项系数为1的多项式,则 $f(x)$是一个不可约多项式方幂的充要条件为:对任意多项式 $g(x)$必有$(f(x),g(x))=1$或对某一正整数 m,$f(x)|g^m(x)$.

证明 必要性.设 $f(x)$是一个不可约多项式 $p(x)$的方幂,即 $f(x)=p^m(x)$.对于任一多项式 $g(x)$,如果 $p(x)$不整除 $g(x)$,则$(f(x),g(x))=1$.如果 $p(x)|g(x)$,则 $f(x)|g^m(x)$.

充分性.假如 $f(x)$不是一个不可约多项式的方幂,则可设 $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$,$(f_1(x),f_2(x))=1$,且 f_1 和 f_2 次数均小于 f 的次数.取 $g(x)=f_1(x)$,则$(f(x),g(x))\neq1$,$f(x)$不整除 $g^m(x)$,与已知条件矛盾.因而 $f(x)$是一个不可约多项式的方幂.

例20 设 m 为正整数,$f(x)$和 $g(x)$为数域 P 上的非0多项式,求证:$g^m(x)|f^m(x)\Leftrightarrow g(x)|f(x)$.

证明 证法1 充分性.设 $g(x)|f(x)$,则有使 $g(x)q(x)=f(x)$,$g^m(x)\cdot q^m(x)=f^m(x)$,因而 $g^m(x)|f^m(x)$,

必要性.设 $g^m(x)|f^m(x)$,故有 $h(x)\in P[x]$,使

$$f^m(x)=h(x)g^m(x) \tag{1}$$

令 $d(x)=(f(x),g(x))$,设

$$f(x)=f_1(x)d(x),\quad g(x)=g_1(x)d(x), \tag{2}$$

则

$$(f_1(x),g_1(x))=1,$$

从而

$$(f_1^m(x),g_1^m(x))=1 \tag{3}$$

将(2)代入(1),得

$$f_1^m(x)d^m(x)=h(x)g_1^m(x)d^m(x).$$

由于 $d(x)\neq 0$,因而 $g_1^m(x)\mid f_1^m(x)$. 由(3),推知 $g_1(x)=c\neq 0\in P$,于是 $g(x)=cd(x)$,

$$d(x)=c^{-1}g(x),\quad g(x)\mid f(x).$$

证法 2　充分性同上一证法.

必要性. 将 $f(x),g(x)$分解成不可约多项式之积,不妨设

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)\cdots p_s^{k_s}(x),$$
$$g(x)=b_0p_1^{t_1}(x)\cdots p_s^{t_s}(x),$$

其中 $k_1,\cdots,k_s,t_1,\cdots,t_s$ 为非负整数,各 $p_i(x)$是首项系数为 1 的不可约多项式,$a_0,b_0\in P$.

$$f^m(x)=a_0^m p_1^{mk_1}(x)\cdots p_s^{mk_s}(x),$$
$$g^m(x)=b_0^m p_1^{mt_1}(x)\cdots p_s^{mt_s}(x),$$

由 $g^m(x)\mid f^m(x)$,得

$$t_1\leqslant k_1,\cdots,t_s\leqslant k_s,$$

则 $g(x)\mid f(x)$.

点评　证法 1. 在证 $g(x)\mid f(x)$时,通过证明$(g(x),f(x))$与 $g(x)$至多只差一个零次多项式因子来实现. 为证明这一点,可将 $f(x)$和 $g(x)$各分解为最大公因式与多项式 $f_1(x)$和 $g_1(x)$之积,而 $f_1(x)$与 $g_1(x)$互素,但显然 $g_1^m(x)\mid f_1^m(x)$,于是 $g_1^m(x)$为零次多项式,从而证明 g_1 为零次多项式. 证法 2 利用了唯一分解定理及不可约多项式的性质.

例 21　设 $f(x)$为多项式,如果 $f(x)\mid f(x^n)$,那么 $f(x)$的根只能是零或单位根.

证明　设 α 为$f(x)$的任意一个根,由已知条件,$f(x)\mid f(x^n)$,$f(x)$的根也是 $f(x^n)$的根,于是 $f(\alpha^n)=0$,即 α^n 是$f(x)$的根. 同样可知,$(\alpha^n)^n=\alpha^{n^2}$ 也是 $f(x)$的根,于是得到 $f(x)$根的无限序列:

$$\alpha,\alpha^n,\alpha^{n^2},\cdots.$$

由于 $f(x)$的根有限,必然存在 $k>j$,使

$$\alpha^{n^k}=\alpha^{n^j}.$$

这样以来

$$\alpha^{n^j}(\alpha^{n^k-n^j}-1)=0,$$

得到 $\alpha=0$ 或 $\alpha^{n^k-n^j}=1$,即 α 为一个单位根.

点评　当一个多项式整除另一个多项式时,前者的根都是后者的根,这是本题的主要立足点.

例 22 设 $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的整数,证明 $f(x)$在有理数域上不可约.

证明 假如 $f(x)$在有理数域上可约,则它在整数环上也可约,即可表为

$$f(x)=g(x)h(x),$$

其中 $g(x)$和 $h(x)$为整系数多项式,且次数比 $2n$ 小. $g(a_i)$和 $h(a_i)$都是整数, $i=1,2,\cdots,n$,且

$$f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=1,$$

因而 $g(a_i)$和 $h(a_i)$同为 1 或同为 -1.

另一方面,对每个实数 x 而言,$f(x)$总为正数,即 $f(x)$无实根,从而 $g(x)$和 $h(x)$都没有实根.如果 $g(a_i)=1$,而某个 $g(a_j)=-1,j\neq i$,则由多项式函数的连续性,$g(x)$必有实根,矛盾.因而 $g(a_1),\cdots,g(a_n)$只能同时为 1 或同时为 -1.同样地,$h(a_1),\cdots,h(a_n)$也只能同时为 1 或同时为 -1.而对 $i=1,\cdots,n$,$g(a_i)$与 $h(a_i)$应同为 1 或同为 -1,从而可知 $g(x)-1$ 与 $h(x)-1$(或者 $g(x)+1$与 $h(x)+1$)至少各有 n 个根 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,但它们次数之和等于 $f(x)$的次数 $2n$,因而 $g(x)-1$ 与 $h(x)-1$(或者 $g(x)+1$ 与 $h(x)+1$)都是 n 次多项式.设

$$g(x)-1=c(x-a_1)\cdots(x-a_n),$$

$$h(x)-1=d(x-a_1)\cdots(x-a_n),c,d \text{ 是整数},$$

(或者上两式左端分别为 $g(x)+1$ 与 $h(x)+1$),则

$$\begin{aligned}f(x)&=g(x)h(x)\\&=cd(x-a_1)^2\cdots(x-a_n)^2+(c+d)(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1.\end{aligned}$$

(或者上式右端第二项前取减号.)比较系数,得 $cd=1,c+d=0$,由 $cd=1$ 知,c,d 同号,与 $c+d=0$ 矛盾.因而 $f(x)$在有理数域上不可约.

点评 证明整系数多项式在有理数域上不可约,除艾森斯坦判别法外,常利用待定系数法,按反证法的思路证明.因为整系数多项式在有理数域上可约必然在整数环上可约,假定其表为两个次数较低的整系数多项式的乘积,推出矛盾.

例 23 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 为整系数多项式,且 $ac+bc$ 为奇数.求证 $f(x)$在有理数域上不可约.

证明 如果 $f(x)$在有理数域上可约,则 $f(x)$在整数环上可约,因 $f(x)$为 3 次多项式,这时必有一次因式,设

$$f(x)=(x+u)(x^2+vx+w),$$

其中 u,v,w 为整数,于是 $c=uw$.但

$$ac+bc=(a+b)c$$

是奇数,因而 $a+b$ 和 c 均为奇数,于是 u,w 都是奇数,$f(1)=1+(a+b)+c$

为奇数，但 $f(1)=(1+u)(1+v+w)$ 为偶数，矛盾，所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

点评 首项系数为1的三次或二次多项式的不可约性等价于有整数根，或有首项系数为1的整系数多项式的因式. 利用比较系数和整数的整除性质，可推出矛盾.

例 24 求证：次数大于零的有理系数多项式都可表为两个有理数域上不可约多项式之和.

证明 首先，设 $f(x)$ 为整系数多项式，令

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,\ n\geqslant 1,\ a_n\neq 0.$$

1) $a_0=0$ 时，取一个素数 p. 令 $g(x)=pf(x)+x^s+p,\ s>n$，这时由艾森斯坦判别法，$g(x)$ 不可约，$h(x)=x^s+p$ 也不可约. 这时可表

$$f(x)=\frac{1}{p}g(x)+\left(-\frac{1}{p}h(x)\right)$$

2) $a_0\neq 0$ 时，取素数 p 不整除 a_0，$p>2$，作

$$g(x)=pf(x)+x^s+p(p-2)a_0,\quad s>n.$$

$g(x)$ 的常数项为 $pa_0+p(p-2)a_0=a_0p(p-1)$，显然 p^2 不整除 $a_0p(p-1)$，这时 $g(x)$ 在有理数域上不可约，$h(x)=x^s+p(p-2)a_0$ 也不可约. 可表

$$f(x)=\frac{1}{p}g(x)+\left(-\frac{1}{p}h(x)\right).$$

其次，设 $f(x)$ 为有理系数多项式，存在非零整数 m，使 $mf(x)$ 为整系数多项式. 可表为

$$mf(x)=u(x)+v(x),$$

$u(x)$ 和 $v(x)$ 在有理数域上不可约，$f(x)=\frac{1}{m}u(x)+\frac{1}{m}v(x)$ 即为所求.

例 25 设复数 c 是某个非零有理系数多项式的根，把全体以 c 为根的有理系数多项式的集合记为 J，即

$$J=\{f(x)\in\mathbf{Q}[x]\mid f(c)=0\}.$$

求证 J 中存在唯一的首项系数为1的 $\mathbf{Q}$ 上不可约多项式 $p(x)$，使对任意的 $f(x)\in J$，$p(x)\mid f(x)$.

证明 由于题设 $J\neq\varnothing$. 设 $p(x)$ 是 J 中次数最低且首项系数为1的多项式，那么 $p(x)$ 必是有理数域上的不可约多项式. 事实上，设在有理数域上分解为 $p(x)=h(x)k(x)$，那么 $p(c)=h(c)k(c)$，由 $p(c)=0$ 可知，$h(c)=0$ 或 $k(c)=0$，即 $h(x)$ 或 $k(x)$ 属于 J. 而 $p(x)$ 在 J 中次数最低，故 $h(x)$ 和 $k(x)$ 中必有一个与 $p(x)$ 同次数，即 $p(x)$ 不可约.

任取 $f(x)\in J$，设

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x),$$

$\partial(r(x))<\partial(p(x))$或 $r(x)=0$. 由 $f(c)=0, p(c)=0$,推知 $r(c)=0$. 因而 $r(x)\in J$,但如 $r(x)\neq 0$,即$\partial(r(x))<\partial(p(x))$,与 $p(x)$在 J 中次数最低矛盾. 于是 $r(x)=0, p(x)\mid f(x)$,最后,$p(x)$是唯一的. 事实上,如 $p_1(x)\in J$ 也是次数最低且首项系数为 1,那么 $p_1(x)\mid p(x), p(x)\mid p_1(x)$,得 $p_1(x)=p(x)$.

点评 首先证明 $p(x)$的存在,这基于自然数最小原理,其次,证明 $p(x)$有给定的整除性质即 $p(x)$是 J 中所有多项式的公因式,这通过带余除法实现. 最后,由相互整除性证明唯一性.

例 26 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是方程$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的根,证明:$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式可以表为$x_1(\neq 0)$与 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的多项式.

证明:因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是方程$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的根,所以

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1,$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=a_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n a_n.$$

关于 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的初等对称多项式设为$\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$. 易见

$$\phi_k=\sigma_k-x_1\phi_{k-1}, k=1,2,\cdots,n,$$

$$(-1)^k\phi_k=a_k+a_{k-1}x_1+\cdots+a_1x_1^{k-1}+x_1^k, k=1,2,\cdots,n.$$

由此可知,$x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式可以表为x_1 和 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的多项式.

例 27 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$,令 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\ (k=0,1,2,\cdots)$.

证明 1) $x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x)$,其中 $g(x)$的次数$<n$ 或$g(x)=0$.

2) 由上式证明牛顿(Newton)公式:

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k=0,\text{对 } 1\leqslant k\leqslant n;$$

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0,\text{对于 } k>n,$$

证明 1) 由假设 $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{x-x_i}$,

$$x^{k+1}f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{x-x_i}f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x^k+x_ix^{k-1}+\cdots+x_i^k)f(x)+g(x).$$

其中 $g(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)$ 是一个次数 $<n$ 的多项式或 $g(x)=0$. 所以

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)f(x)+g(x). \quad (1)$$

2) 由于 $f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$,

$$x^{k+1}f'(x)=x^{k+1}(nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}). \quad (2)$$

由(1),(2)两式得

$$\begin{aligned}&(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)(x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma^n)+g(x)\\&=x^{k+1}(nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}).\end{aligned} \quad (3)$$

当 $k\leqslant n$ 时,比较(3)式两端含 x^n 的系数. 首先由于 $\partial(g(x))<n$ 不含 x^n 项,所以(3)式左端 x^n 项的系数为

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k\sigma_ks_0,$$

而(3)式右端含 x^n 的项只有一项,系数为 $(-1)^k(n-k)\sigma_k$. 所以

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k\sigma_ks_0=(-1)^k(n-k)\sigma_k.$$

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0, \quad (4)$$

而当 $k>n$ 时,(3)式右端所有项的次数都 $>n$,所以含 x^n 的系数为0,而(3)式左端含 x^n 的系数为 $s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}$,因而

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0. \quad (5)$$

§1.3 习　题

1. 证明: $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$ 是数环,且是包含 i 的最小数环: $\mathbf{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{Q}$ 数域,且是包含 i 的最小数域.

2. m,p,q 适合什么条件时,有

1) $x^2+mx-1\mid x^3+px+q$,

2) $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$.

3. 用综合除法把 $f(x)$ 表成 $x-a$ 的方幂和,即表成

$$f(x)=b_0(x-a)^n+b_1(x-a)^{n-1}+\cdots+b_n$$

的形式:

1) $f(x)=x^4-2x^2+3, x_0=-2$;

2) $f(x)=x^4+2\mathrm{i}x^3-(1+\mathrm{i})x^2-3x+7+\mathrm{i}, x_0=-\mathrm{i}$.

4. 证明: x^2+1 整除 $f(x)=(\cos\phi+x\sin\phi)^n-\cos n\phi-x\sin n\phi$.

5. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$, $g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 t,u 的值.

6. 证明: $((f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$, ($h(x)$ 的首项

系数为 1).

7. 如果 $f(x),g(x)$不全为零,证明:$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$.

8. 设数域 P 上多项式 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式为 $d(x)$,证明:把多项式视为较大的数域上时,$d(x)$仍是 $f(x)$和 $g(x)$最大公因式.

9. 设 $f_1(x),\cdots,f_m(x),g_1(x),\cdots,g_n(x)$都是多项式,而且$(f_i(x),g_j(x))=1(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,求证:$(f_1(x)\cdots f_m(x),g_1(x)\cdots g_n(x))=1$.

10. 证明:设 $p(x)$是次数大于零的多项式,如果对于任何多项式 $f(x)$,$g(x)$,由 $p(x)\mid f(x)g(x)$可以推出 $p(x)\mid f(x)$或者 $p(x)\mid g(x)$,那么$p(x)$是不可约多项式.

11. 证明次数>0 且首项系数为 1 的多项式 $f(x)$是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是,对任意的多项式 $g(x),h(x)$,由 $f(x)\mid g(x)h(x)$可以推出 $f(x)\mid g(x)$,或者对某一正整数 m,$f(x)\mid h^m(x)$.

12. 求 t 值使$f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

13. 求多项式 x^3+px+q 有重根的条件.

14. 证明:$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$不能有重根.

15. 如果 a 是 $f'''(x)$的一个 k 重根,证明 a 是$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$的一个 $k+3$ 重根.

16. 证明:任意数域上的不可约多项式在复数域中无重根.

17. 证明:如果$(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$,那么$(x-1)\mid f_1(x)$,$(x-1)\mid f_2(x)$.

18. 设 $f(x)$是一个整系数多项式,试证:如果 $f(0)$与 $f(1)$都是奇数,那么 $f(x)$不能有整数根.

19. 设 $f(x)$和 $g(x)$为非零多项式,$f(x)g(x)+f(x)+g(x)=p(x)$是一个不可约多项式,求证:$(f(x),g(x))=1$.

20. 证明:$x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$,其中 m,n,p 都是非负整数.

21. 求证多项式 x^p+p+1(p 为素数)在有理数域上不可约.

22. 设整系数多项式 $f(x)$在多于 3 个整数处取值$+1$,求证 $f(x)$在任何整数处不取-1.

23. 设 p 为素数,求证多项式 $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 在有理数域上不可约.

24. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是不同的整数,求证:$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x

$-a_n)-1$ 在有理数域上不可约.

25. 根据牛顿公式用多项式表示. s_2, s_3, s_4, s_5, s_6.

26. 求一个 n 次方程使 $s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}=0$.

27. 求一个 n 次方程使 $s_2=s_3=\cdots=s_n=0$.

28. 用初等对称多项式表出下列对称多项式:

1) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

2) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$.

29. 用初等对称多项式表出下列 n 元对称多项式:

1) $\sum x_1^4$;

2) $\sum x_1^2x_2x_3$.

§1.4 习题答案与提示

1. 提示:设 R 是数环,包含 i,则必然包含 $\mathrm{i}-\mathrm{i}=0, \mathrm{i}^2=-1, 0-(-1)=1, 1+1=2, \cdots, (-1)+(-1)=-2, \cdots, \mathrm{i}+\mathrm{i}=2\mathrm{i}, \cdots, 0-\mathrm{i}=-\mathrm{i}, (-\mathrm{i})+(-\mathrm{i})=-2\mathrm{i}, \cdots$. $Z[\mathrm{i}]\subseteq R$. 类似地,可证明另一结论.

2. 1) $p=-m^2-1, q=m$.

2) $p=2-m^2, q=1$ 或 $m=0$, $\quad p=q+1$.

3. 提示:用综合除法得 $f(x)=(x-a)q_0(x)+r_0, q_0(x)=(x-a)q_1(x)+r_1, q_1(x)=(x-a)q_2(x)+r_2, \cdots$. 依次代入便得形如 $f(x)=b_0(x-a)^n+b_1(x-a)^{n-1}+\cdots+b_n$ 的表达式.

1) $f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)+11$.

2) $f(x)=(x+\mathrm{i})^4-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i})^3-(1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i})^2-5(x+\mathrm{i})+7+5\mathrm{i}$.

4. 提示: x^2+1 的根是 $\pm\mathrm{i}$,它们显然是 $f(x)$ 的根.

5. $t=-4, u=0$.

6. 提示:设 $d(x)=(f(x),g(x))$,由于有 $u(x), v(x)$ 使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$,得 $f(x)h(x)u(x)+g(x)h(x)v(x)=d(x)h(x)$,又显然 $d(x)h(x)$ 是 $f(x)h(x)$ 和 $g(x)h(x)$ 的公因式.

7. 提示:设 $d(x)=(f(x),g(x)), f(x)=f_1(x)d(x), g(x)=g_1(x)\cdot d(x)$,由于有 $u(x), v(x)$ 使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$, $d(x)$ 不为零,得 $f_1(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1$.

8. 提示:在 P 上有 $d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x), f(x)=d(x)q(x), g(x)=d(x)p(x)$,在较大数域上,仍成立.

9. 提示:设 $f_1(x)\cdots f_m(x)$ 与 $g_1(x)\cdots g_n(x)$ 不互素,那么他们必有不可约

的公因式 $p(x)$，由不可约多项式的性质，$p(x)\mid f_i(x)$，$p(x)\mid g_j(x)$，其中 $i\in\{1,\cdots,m\}$，$j\in\{1,\cdots,n\}$，与 $(f_i(x),g_j(x))=1$ 矛盾.

10. 提示：如果 $p(x)$ 不是不可约多项式，则由于 $\partial(p(x))>0$，故可表 $p(x)=p_1(x)p_2(x)$，$\partial(p_1(x))<\partial(p(x))$，$\partial(p_2(x))<\partial(p(x))$. $p(x)\mid p(x)$，但 $p(x)$ 不整除 $p_1(x)$ 且 $p(x)$ 不整除 $p_2(x)$，矛盾.

11. 提示：设 $f(x)=p^m(x)$，$p(x)$ 不可约，$f(x)\mid g(x)h(x)$. 如 $p(x)$ 不整除 $h(x)$，则 $(p(x),h(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，因而 $f(x)\mid g(x)$；如 $p(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h^m(x)$. 反之，设 $f(x)$ 不是某一不可约多项式的方幂，则显然 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 互素，且次数都小于 $\partial(f(x))$，取 $g(x)=f_1(x)$，$h(x)=f_2(x)$，$f(x)\mid g(x)h(x)$，但 $f(x)$ 不整除 $g(x)$，$f(x)$ 不整除 $h^m(x)$，m 为任意正整数.

12. $t=3,-\dfrac{15}{4}$.

13. $4p^3+27q^2=0$.

提示：让 $f(x)=x^3+px+q$ 与 $f'(x)=3x^2+p$ 辗转相除，得余式 $4p^3+27q^2$.

14. 提示：$f_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$，$f_n'(x)=f_{n-1}(x)$，$f_n(x)-f_n'(x)=\dfrac{x^n}{n!}$. 如 $f_n(x)$ 有重根，必为 $f_n(x)$ 与 $f_n'(x)$ 的公根，即 $\dfrac{x^n}{n!}$ 的根，即为 0，但 $f_n(0)\neq 0$，矛盾.

15. 提示：

$$g'(x)=\frac{1}{2}[f'(x)+f'(a)]+\frac{x-a}{2}f''(x)-f'(x)$$

$$=\frac{x-a}{2}f''(x)-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f'(a),$$

$$g''(x)=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{x-a}{2}f'''(x)-\frac{1}{2}f''(x)$$

$$=\frac{x-a}{2}f'''(x),$$

由于 a 是 $f'''(x)$ 的 k 重根，又 $g''(a)=0$，故 a 是 $g''(x)$ 的 $k+1$ 重根. $g'(a)=0$，所以 a 是 $g'(x)$ 的 $k+2$ 重根. 而 $g(a)=0$，所以 a 是 $g(x)$ 的 $k+3$ 重根.

16. 提示：$f(x)$ 在数域 P 上与 $f'(x)$ 的最大公因式 $d(x)$，当 P 扩大时仍成立（见第 7 题）. 特别地，$f(x)$ 和 $f'(x)$ 互素也不因数域扩大而改变.

17. 提示：$x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$，其中 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$\beta=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$. $0=f_1(\alpha^3)+xf_2(\alpha^3)=f_1(x)+xf_2(1)$，因而 $f_1(1)=0$，$f_2(1)=0$，$(x-1)\mid$

$f_1(x),(x-2)\mid f_2(x)$.

18. 提示:若 $f(x)$有整数根 α,则$(x-\alpha)\mid f(x)$,$f(x)=(x-\alpha)g(x)$,由 $x-\alpha$ 本原,所以 $g(x)$是整系数多项式.令 $x=0$,得 $f(0)=(-\alpha)g(0)$,令 $x=1$,$f(1)=(1-\alpha)g(1)$,由 $f(0)$,$f(1)$为奇数,从而得 α 和 $1-\alpha$ 为奇数,矛盾.

19. 提示:若 $f(x)$与 $g(x)$不互素,$d(x)=(f(x),g(x))$次数>0,由 $d(x)\mid f(x)$,$d(x)\mid g(x)$,知 $d(x)\mid p(x)$,$p(x)$不可约,存在 $c\neq 0$,$cd(x)=p(x)$,所以 $p(x)\mid f(x)$,$p(x)\mid g(x)$,

$$\begin{aligned}\partial(p(x))&=\partial(f(x)g(x)+f(x)+g(x))=\partial(f(x)g(x))\\&=\partial(f(x))+\partial(g(x))\geqslant\partial(p(x))+\partial(p(x))=2\partial(p(x)),\end{aligned}$$

与$\partial(p(x))>0$ 矛盾.

20. 提示:x^2+x+1 的两根为 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,$\beta=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

设 $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$,$f(\alpha)=(\alpha^3)^m+(\alpha^3)^n\alpha+(\alpha^3)^p\alpha^2=1+\alpha+\alpha^2=0$.故$(x-\alpha)\mid f(x)$,同理$(x-\beta)\mid f(x)$.由于$(x-\alpha,x-\beta)=1$,于是$(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\mid f(x)$,即 $x^2+x+1\mid f(x)$.

21. 提示:$p=2$ 时显然.设 $p>2$,令 $x=y-1$,得

$$x^p+p+1=(y-1)^p+p+1=y^p+C_p^1y^{p-1}(-1)+\cdots+C_p^{p-1}y(-1)^{p-1}+p.$$

由艾森斯坦判别法,得证.

22. 提示:$f(x)-1$ 至少有 4 个整数根,即可表 $f(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)h(x)$,其中 a_1,a_2,a_3,a_4 与 $h(x)$的系数都是整数.当 x 取整数值时,$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$是不同的整数的乘积,其中至多一个取$+1$,一个取$-1$,其余的两个异于$\pm 1$.它们的积不能等于素数,当然不能等于$-2$.因而 $f(x)-1\neq-2$,$f(x)\neq-1$.

23. 提示:令 $x=y+1$,得

$$g(y)=f(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1}=y^{p-1}+C_p^1y^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1},$$

$$C_p^i=\frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!},i=1,2,\cdots,p-1.$$

由于$(p,i!)=1$,故有 $i!$ 整除$(p-1)\cdots(p-i+1)$,所以 $p\mid C_p^i$,$i=1,2,\cdots,p-1$,$g(y)$的常数项为 $C_p^{p-1}=p$,故 p^2 不整除常数项.由艾森斯坦判别法,$g(y)$在有理数域上不可约,由此得出 $f(x)$的不可约性.

24. 提示:假如 $f(x)=g(x)h(x)$,$g(x)$和 $h(x)$是低于 n 次的首项系数为 1 的整系数多项式,则对于 $i=1,2,\cdots,n$,$g_i(a_i)h(a_i)=-1$,$g(a_i)+h(a_i)=0$.但 $g(x)+h(x)$次数低于 n,推出 $g(x)+h(x)=0$,$h(x)=-g(x)$,$f(x)=-g(x)^2$.两端首项系数矛盾.

25. 1) 当 $n\geqslant 6$ 时，

$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$,

$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$,

$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$,

$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3+5\sigma_5$,

$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3$,

$+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2-6\sigma_6$.

2) 当 $n=5$ 时，s_2,s_3,s_4,s_5 同上，

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$
$$+6\sigma_1\sigma_5+2\sigma_2^3+8\sigma_1\sigma_5+3\sigma_3^2.$$

3) 当 $n=4$ 时，s_2,s_3,s_4 同 1)；s_6 同 2)；

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3.$$

4) 当 $n=3$ 时，s_2,s_3 同 1)；s_5,s_6 同 3)；

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2.$$

5) 当 $n=2$ 时，s_2 同 1)；s_4,s_5,s_6 同 4)；

$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2.$$

26. $x^n+a=0$，其中 a 为任意复数.

27. $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\dfrac{\sigma_1^i}{i!}x^{n-i}=0$.

28. 1) $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$.

2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$.

3) $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3+\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2$.

29. 1) $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$.

2) $\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$.

第二章　行　列　式

§2.1　基本知识

一、排列和逆序

1. 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称之为一个 n 级排列，n 级排列共有 $n!$ 个.

2. 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序. 一个排列中逆序的总数就称这个排列的逆序数，用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列.

二、n 阶行列式的定义

n 级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ \cdots a_{nj_n} \tag{2}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列，每一项(2)都按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，(2)带有正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，(2)带有负号. n 级行列式也称 n 阶行列式，这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和，共 $n!$ 项.

定义又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

三、行列式的性质

1. 行列互换,行列式不变,即行列式转置不变;

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D'.$$

2. 交换行列式的两行(列),行列式改变符号.

特别地,如果行列式中有两行(列)相同,则行列式为零.

3. 行列式某一行(列)的所有元素都乘以同一个数 k,就相当于用 k 乘此行列式,或者说行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式的符号之外.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

特别地,如果行列式中一行(列)的元素全部为零,那么行列式为零.

如果行列式中两行(列)的对应元素成比例,那么行列式为零.

4. 如果行列式中某一行(列)的元素都是两数之和,那么这个行列式就等于两个行列式的和,这两个行列式分别以两个加数之一作为该行(列)相应位置上的元素,其余各行(列)都与原行列式相同.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. 把行列式的某一行(列)的所有元素乘以同一个数后加到另一行(列)的对应元素上,行列式不变.

6. 行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式乘积之和;行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j, \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j, \end{cases}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在第 i 行和第 j 列划去后留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}. $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

7. 行列式按某 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$展开—拉普拉斯(Laplace)定理:设在 $n(n\geqslant 2)$阶行列式 D 中任意取定了 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$个行(列),则由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与它们各自的代数余子式乘积的和等于行列式 D.

k 阶子式:在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列($k\leqslant n$),位于这些行和列的交点上的 k^2 个元素按照原来的位置组成的一个 k 阶行列式 M 称为行列式 D 的一个 k 阶子式.

k 阶子式的余子式:在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来的位置组成的 $n-k$ 阶行列式 M' 称为 k 阶子式 M 的余子式. M 与 M' 称为 D 的一对互

余的子式.

设 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行和列指标分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$，则 M 的代数余子式为 $A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M'$

四、特殊行列式

1. 上(下)三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

4. 拉普拉斯定理的两个特殊情形

1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

2) $$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

五、克拉默(Cramer)法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则该线性方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$为把 D 的第 i 列的元素换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得到的行列式.

特别地,如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$,那么它只有零解.如果方程组有非零解,那么必有 $D=0$.

六、行列式乘法：两个 n 阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

的乘积等于 n 阶行列式

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj},i,j=1,2,\cdots,n.$

§2.2 例 题

一、行列式的计算

计算行列式常用的方法有：定义法、化三角形法、递推法、数学归纳法及公式法等.在计算 n 阶行列式时要根据行列式中行(或列)元素的特点来选择相应的解题方法.

类型Ⅰ “两条线”行列式(非零元分布在两条线上).

两条线行列式常见类型有以下几种：

$$\begin{vmatrix} \ddots & & \iddots \\ & \times & \\ \iddots & & \ddots \end{vmatrix},\begin{vmatrix} \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ * & & \ddots \end{vmatrix},\begin{vmatrix} \ddots & & * \\ \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \end{vmatrix},\begin{vmatrix} & \iddots & \iddots \\ \iddots & \iddots & \\ \iddots & & * \end{vmatrix},\begin{vmatrix} * & & \iddots \\ & \iddots & \iddots \\ \iddots & \iddots & \end{vmatrix},\begin{vmatrix} \ddots & & * \\ & \ddots & \\ * & & \ddots \end{vmatrix},\begin{vmatrix} * & & \iddots \\ & \iddots & \\ \iddots & & * \end{vmatrix}$$

例 1 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=?$

解 解法 1

$$D\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 行}}a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}+b_1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

解法 2　用拉普拉斯定理计算.

$$D \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1,4 行}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+4)+(1+4)} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3).$$

解法 3　用特殊的拉普拉斯展开式计算.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3).$$

例 2　计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & c_1 & d_1 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ c_n & & & & & & & d_n \end{vmatrix}.$$

解　解法 1　利用递推方法.

$$D_{2n} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 行}} a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & & & d_n \end{vmatrix} + b_n(-1)^{1+2n} \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_nd_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} - b_nc_n(-1)^{2n-1+1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)},$$

于是$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)}=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})D_{2(n-2)}$

$$=\cdots\cdots=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})\cdots(a_2d_2-b_2c_2)(a_1d_1-b_1c_1).$$

解法 2　利用拉普拉斯定理.

$$D_{2n}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第}1,2n\text{行}}\begin{vmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{vmatrix}(-1)^{(1+2n)+(1+2n)}\begin{vmatrix}a_{n-1} & & & b_{n-1}\\ & \ddots & ⋰ & \\ & a_1 & b_1 & \\ & c_1 & d_1 & \\ & ⋰ & \ddots & \\ c_{n-1} & & & d_{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)}.$$

以下同解法 1.

例 3　计算 n 级行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x & y & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y\\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$$

解　解法 1　利用降阶法.

$$D_n\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}}x\begin{vmatrix}x & y & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x & y\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}+$$

$$y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}y & 0 & \cdots & 0 & 0\\ x & y & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & y & 0\\ 0 & 0 & \cdots & x & y\end{vmatrix}=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

解法 2　直接利用定义.

由行列式的定义知此行列式除项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 和 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 外其余乘积项都是零，故 $D_n=(-1)^{\tau(12\cdots n)}x\cdot x\cdots x+(-1)^{\tau(23\cdots n1)}y\cdot y\cdots y=x^n+(-1)^{n-1}y^n$.

例 4　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & & & b \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ b & & & a \end{vmatrix}$$

解 解法 1 降阶化三角形

$$D_n \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}} a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & & & & b \\ a & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^n + b(-1)^{(n+1)}\cdot b\cdot(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix} = a^n - a^{n-2}b^2.$$

解法 2 利用拉普拉斯定理

将第 n 行依次与第 $n-1$ 行，$n-2$ 行，…，2 行对换，经过 $n-2$ 次行的对换成为第 2 行，再将第 n 列依次与第 $n-1$，$n-2$，…，2 列交换，经过 $n-2$ 次列交换成为第 2 列，于是取第 1，2 行按拉普拉斯定理展开.

$$D_n=(-1)^{n-2}\cdot(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a & b & & & \\ b & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix}$$

$$=(a^2-b^2)a^{n-2}=a^n-a^{n-2}b^2$$

解法 3 化三角形法

当 $a=0$ 时，$D=0=a^n-a^{n-2}b^2$. 当 $a\neq 0$ 时，第 1 行乘以 $\left(-\frac{b}{a}\right)$ 加到第 n 行上，得：

$$D_n=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & \\ 0 & & & & & a-\frac{b^2}{a} \end{vmatrix} = a^{n-1}\left(a-\frac{b^2}{a}\right)=a^n-a^{n-2}b^2.$$

总之有 $D_n=a^n-a^{n-2}b^2$.

注意 此种解法要考虑 $a=0$ 的情况，否则不能用 $\left(-\frac{b}{a}\right)$ 去乘某一行.

点评 "两条线"行列式一般采取直接展开降阶法计算，或用拉普拉斯定理展开，降阶后的行列式或为三角形行列式，或得到一个递推公式. 应该注意的是两条线行列式当 $n>3$ 时，不能用对角线法则展开. 另外，在例 2 的解法 1 中利用了递推法，即由原行列式 D_n 出发依次得出其与较低阶的行列式之间的关系式(即递推公式)，最后得出 D_n 与 D_1 和 D_2 的关系.

递推法可分为直接递推和间接递推，例 2 的解法 1 则是利用了直接递推法. 用直接递推法的关键是找出一个关于 D_{n-1} 的代数式来表示 D_n，依次从 $D_1 \to D_2 \to D_3 \to \cdots \to D_n$ 逐级递推便可以求出 D_n 的值.

类型Ⅱ "三条线"行列式(非零元分布在三条线上).

1. "三对角"行列式：形式如 $\begin{vmatrix} \ddots & \ddots & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} & & \iddots & \iddots \\ & \iddots & \iddots & \iddots \\ \iddots & \iddots & & \end{vmatrix}$.

例 5 计算

$$D_5=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 解法 1 化三角形法.

从第 1 行开始将第 i 行的一个倍数加到第 $i+1$ 行，化成三角形行列式.

解法 2 递推法.

$$D_5 \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 行}} 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_4 - D_3.$$

把上述关系整理成 $D_5-D_4=D_4-D_3$，递推该关系式就有：

$$D_5-D_4=D_4-D_3=D_3-D_2=D_2-D_1=3-2=1, \quad D_5=D_4+1.$$

再一次递推：$D_5=D_4+1=D_3+2=D_2+3=D_1+4=6$

例 6 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}.$$

解 解法1 按第1列展开得：

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\beta\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}\qquad(n\geqslant3).$$

即有递推关系式 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$，为了得到 D_n 的一般表达式，可先设 $\alpha\neq\beta$，采用以下归纳法.

$$D_1=\alpha+\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\\ \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta},$$

$$D_3=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha & \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha\\ & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}=(\alpha+\beta)^3-2\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}.$$

由此可以猜想：

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

事实上 当 $n=1$ 时上式显然成立.假设对阶数小于 n 时公式成立，下证其等于 n 时也成立.

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}=(\alpha+\beta)\cdot\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\cdot\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

由数学归纳法可知 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

在 $\alpha=\beta$ 的情况，有

$$D_n=\begin{vmatrix}2\alpha & \alpha & & & & \\ \alpha & 2\alpha & \alpha & & & \\ & \alpha & 2\alpha & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \alpha \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \alpha & 2\alpha\end{vmatrix}=\alpha^n\begin{vmatrix}2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\alpha^n\begin{vmatrix}2 & 1 & & & & \\ & \frac{3}{2} & 1 & & & \\ & & \frac{4}{3} & 1 & & \\ & & & \frac{5}{4} & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \frac{n+1}{n}\end{vmatrix}=(n+1)\alpha^n.$$

点评 利用数学归纳法来计算行列式,分两步进行,第一步发现和猜想,第二步证明猜想的正确性.第二步的关键是首先要得到 D_n 关于 D_{n-1} 和 D_{n-2} 的递推关系式.

解法 2 递推法.设 $\alpha\neq\beta$.当 $\alpha=\beta$ 时解法同解法 1.

由解法 1 所得递推公式 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$,

$$\begin{aligned}D_n-\alpha D_{n-1}&=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})\\&=\beta^3(D_{n-3}-\alpha D_{n-4})=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)\\&=\beta^{n-2}[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)]=\beta^n.\end{aligned}\tag{1}$$

在递推式 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$ 中,α 和 β 的地位是一样的,同理可得:

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n,\tag{2}$$

$(2)\times\alpha-(1)\times\beta$ 得:$(\alpha-\beta)D_n=\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}$,故有

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

解法 3 差分法.

由 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$,令 $p=\alpha+\beta,q=-\alpha\beta$.由特征方程 $\lambda^2-p\lambda-q=0$ 得两特征根为:$\lambda_1=\alpha,\lambda_2=\beta$.

若 $\alpha\neq\beta$,则 $D_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n$.

由 $D_1=\alpha+\beta, D_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$，有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=C_1\alpha+C_2\beta,\\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=C_1\alpha^2+C_2\beta^2.\end{cases}$$

解方程组得：$C_1=\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}, C_2=\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}$. 故所求 $D_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

若 $\alpha=\beta$，即特征方程有相等实根，这时 $D_n=C_1\lambda_1^n+C_2n\lambda_1^n=C_1\alpha^n+C_2n\alpha^n$. 同样代入 D_1, D_2 可确定常数 $C_1=C_2=1$，从而 $D_n=(n+1)\alpha^n$.

总之有
$$D_n=\begin{cases}(n+1)\alpha^n, \alpha=\beta;\\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, \alpha\neq\beta.\end{cases}$$

点评 三对角行列式可按以下方法求解.

首先得到一个一般的递推公式

$$D_n=pD_{n-1}+qD_{n-2}.$$

然后可用以下三种方法之一求出 D_n 的表达式：

1) 先计算 D_1, D_2, D_3 等，找出规律，进行猜想，然后再用教学归纳法进行证明.

2) 间接递推法：即借助于行列式中元素的对称性，交换行列式构造出关于 D_n 和 D_{n-1} 的方程组，从而消去 D_{n-1} 就可解得 D_n.

3) 把关系 $D_n=pD_{n-1}+qD_{n-2}$ 看作一差分方程，求出特征方程 $\lambda^2-p\lambda-q=0$ 的两个根 λ_1, λ_2；则 $D_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n(\lambda_1\neq\lambda_2)$ 或 $D_n=C_1\lambda_1^n+C_2n\lambda_2^n(\lambda_1=\lambda_2)$，再从由 D_1, D_2 得到的一个方程组中定出常数 C_1, C_2.

2. "爪型"行列式，其非零元分布图如下：

例 7 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}, \text{其中 } a_i\neq0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

解 解法 1 化三角形

$$D_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{各列乘}(-1)\text{加到第 1 列上}]{\text{从第 2 列至第}(n+1)\text{列}}\begin{vmatrix} a_0-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\cdot\prod_{j=1}^{n}a_j$$

$$=\prod_{j=1}^{n}a_j\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

解法 2 化三角形法

$$D_{n+1}\xlongequal[\substack{\cdots\cdots \\ c_1-\frac{1}{a_n}c_{n+1}}]{\substack{c_1-\frac{1}{a_1}c_2 \\ c_1-\frac{1}{a_2}c_3}}\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a_1 & & & \\ & & a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix}=\prod_{j=1}^{n}a_j\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

点评 对于爪型行列式,可按行(列)提取公因子,然后化为上(下)三角形行列式.

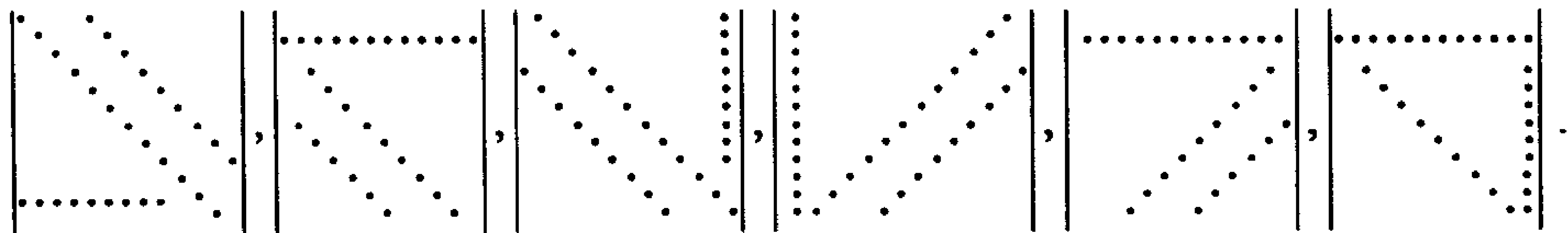
例 8 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解 化三角形法.

$$D_n\xlongequal[\substack{\cdots\cdots \\ c_n-\frac{1}{n}c_1}]{\substack{c_n-\frac{1}{2}c_{n-1} \\ c_n-\frac{1}{3}c_{n-2}}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n!\left(1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

3. Hessenberg 型，其非零元分布图如下：



例 9 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$$

解 解法 1 数学归纳法.

当 $n=2$ 时， $D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_1+x \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$.

猜想：$D_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

设 $n=k$ 时，$D_k=x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x+a_k$，则当 $n=k+1$ 时，

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}} x\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & x & -1 \\ a_k & a_{k-1} & & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$$

$$+a_{k+1}(-1)^{k+1+1}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & x & -1 \end{vmatrix}=xD_k+a_{k+1}$$

$$=x(x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)+a_{k+1}$$

$$=x^{k+1}+a_1x^k+a_2x^{k-1}+\cdots+a_kx+a_{k+1}.$$

因此 $$D_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

解法 2 递推法.

$$D_n \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}} xD_{n-1}+a_n=a_n+x(xD_{n-2}+a_{n-1})=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n$$

$$= x^3 D_{n-3} + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = \cdots$$

$$= x^{n-1}D_1 + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

$$= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_2 x^{n-2} + a_1 x^{n-1} + x^n .$$

解法 3　化三角形法.

第 j 列乘以 x^{j-1} 加至第 1 列($j=2,3,\cdots,n$),再按第 1 列展开.

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_2 & a_1 + x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\cdot(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n .$$

解法 4　化三角形法.

$$D_n \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 } n \text{ 行}} a_n\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & x & -1 \end{vmatrix} +$$

$$a_{n-1}(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} x & 0 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & x & -1 \end{vmatrix} +$$

$$a_{n-2}(-1)^{n+3}\begin{vmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & x & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & x & -1 \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(a_1+x)(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}$$

$$=a_n\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1}+a_{n-1}x\cdot(-1)^{n+2}\cdot(-1)^{n-2}+a_{n-2}\cdot(-1)^{n+3}x^2\cdot(-1)^{n-3}$$
$$+\cdots+(a_1+x)\cdot x^{n-1}=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n.$$

例 10 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & -1 & & & \\ & 2 & -2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

解 解法 1 降阶化三角形.

$$D_n \xlongequal[\text{第 1 列}]{\text{各列加到}} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ & -1 & & & \\ & 2 & -2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ 2 & -2 & & \\ \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots \\ & & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}.$$

解法 2 降阶化三角形.

$$D_n \xlongequal[c_n+c_{n-1}]{\substack{c_2+c_1 \\ c_3+c_2 \\ \cdots\cdots}} \begin{vmatrix} 1 & 1+2 & 1+2+3 & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & 0 & 0 & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & n-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{1+n}(n-1)!\ =(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{2}.$$

解法 3　化三角形法.

$$D_n \xlongequal[\substack{c_{n-2}+c_{n-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_1+c_2}]{c_{n-1}+c_n} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{(n-1)(n+2)}{2} & \cdots & n \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\ \frac{n(n+1)}{2}=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}.$$

类型Ⅲ　各行(列)元素之和相等(或多数相等仅个别不相等)的行列式——行加法(或列加法)再化为三角形行列式.

例 11　计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解　$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{各列加到第 1 列}]{\text{从第 2 列开始}} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{分别加到各列上}]{\text{第1列乘上}(-1)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}\cdot(n-1)=(-1)^{n-1}(n-1).$$

例 12 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}.$$

解 解法 1 三角形法.

将各列都加到第 1 列,并提取公因子,得:

$$D_n=[x+(n-2)a]\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x-a & a & \cdots & a \\ 1 & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{分别加到各列上}]{\text{第1列乘}(-a)}[x+(n-2)a]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-2a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}.$$

解法 2 加边法(升阶法).

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[\text{各列都减第 1 列}]{\text{从第 2 列开始}}\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ a & x-2a & 0 & \cdots & 0\\ a & 0 & x-2a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & 0 & 0 & \cdots & x-2a\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=(x-2a)^n\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ \dfrac{a}{x-2a} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \dfrac{a}{x-2a} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{a}{x-2a} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=(x-2a)^n\begin{vmatrix}1+\dfrac{na}{x-2a} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \dfrac{a}{x-2a} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \dfrac{a}{x-2a} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{a}{x-2a} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=(x-2a)^n\left(1+\frac{na}{x-2a}\right)=[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}.$$

显然当 $x=2a$ 时上式成立且 $D_n=0$.

点评 加边法是将所要计算的 n 阶行列式适当地添加一行一列(或 m 行 m 列)得到一个新的 $n+1$(或 $n+m$)阶行列式,保持行列式的值不变,但要所得的 $n+1(n+m)$阶行列式较易计算,加边法的一般做法是:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_n\\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\text{或}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

特殊情况取 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$.

解法 3 递推法.

$$D_n=\begin{vmatrix} x-2a+a & a & a & \cdots & a \\ 0+a & x-a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0+a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}.$$

$$=(x-2a)D_{n-1}+\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$

$$=(x-2a)D_{n-1}+a(x-2a)^{n-1}$$

$$=(x-2a)[(x-2a)D_{n-2}+a(x-2a)^{n-2}]+a(x-2a)^{n-1}$$

$$=(x-2a)^2D_{n-2}+2a(x-2a)^{n-1}=\cdots$$

$$=(x-2a)^{n-1}D_1+(n-1)a(x-2a)^{n-1}$$

$$=(x-2a)^{n-1}(x-a)+(n-1)a(x-2a)^{n-1}$$

$$=(x-a+na-a)(x-2a)^{n-1}=[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}.$$

解法 4　析因法. 令

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

显然 $f(2a)=0$，$f(-(n-2)a)=0$（各列之和为 0），故 $x-2a$，$x+(n-2)a$ 是 $f(x)$ 的一次因式.

$$又\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a & a \\ a & x-a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x-a & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=D_{n-1}+D_{n-1}+\cdots+D_{n-1}=nD_{n-1}.$$

同理可得：$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x}=n(n-1)D_{n-2}$，$\frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x}=n(n-1)(n-2)D_{n-3}$，…，$\frac{\mathrm{d}^{n-2} f(x)}{\mathrm{d}x}=n(n-1)\cdots 3D_2$，$\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(x)}{\mathrm{d}x}=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot D_1=n!\ D_1$. 因此 $f'(2a)=f''(2a)=\cdots=f^{(n-2)}(2a)=0$，而 $f^{(n-1)}(2a)=n!\ a$.

$2a$ 是 $f(x)$ 的 $n-1$ 重根，又因 $f(x)$ 是 x 的 n 次多项式，从而 $f(x)=c(x-2a)^{n-1}[x+(n-2)a]$，其中 c 为待定系数，由行列式 $f(x)$ 可以看出 x^n 的系数为 1，故 $c=1$，

$$D_n=(x-2a)^{n-1}[x+(n-2)a].$$

解法 5　拆行(列)法.

将各列每个元素都写成两项之和，其中第一项为 a，除主对角线上元素的第二项为 $x-2a$ 外，其余各元素第二项均为 0，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(x-2a) & a+0 & a+0 & \cdots & a+0 \\ a+0 & a+(x-2a) & a+0 & \cdots & a+0 \\ a+0 & a+0 & a+(x-2a) & \cdots & a+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+0 & a+0 & a+0 & \cdots & a+(x-2a) \end{vmatrix}.$$

根据行列式的性质，这个行列式可分成 2^n 个行列式之和，若某个行列式有两个或两个以上的列选自这个行列式各列的第一项，则该行列式至少有两列相同，其值为 0，因此在这 2^n 个行列式中除去值为零的外仅剩下 $n+1$ 个，这 $n+1$ 个行列式为：各列全选这个行列式各列的第二项或仅有一列选第一项，其他各列都选第二项，因此这个行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x-2a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & x-2a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} x-2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & x-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & 0 & & x-2a \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x-2a & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x-2a & \cdots & 0 & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-2a & a \\ 0 & 0 & & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=(x-2a)^n+a(x-2a)^{n-1}+a(x-2a)^{n-1}+\cdots+a(x-2a)^{n-1}$$

$$=(x-2a)^n+na(x-2a)^{n-1}=(x-2a)^{n-1}[x+(n-2)a].$$

点评　拆行(列)法(或分裂行列式法)就是将所给行列式拆成两个或若干个

行列式之和，然后再求行列式的值.拆行(列)法有两种情况：一是行列式中有某行(列)是两项之和，可直接利用性质拆项；二是所给行列式中行(列)没有两项和形式.这时需作保持行列式之值不变，使其化为两项和.

解法 6　数学归纳法

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} x-a & a \\ a & x-a \end{vmatrix}=(x-a)^2-a^2=(x-2a)x$.

当 $n=3$ 时，$D_3=\begin{vmatrix} x-a & a & a \\ a & x-a & a \\ a & a & x-a \end{vmatrix}=(x-2a)^2[x+(3-2)a]$.

猜想：$D_n=(x-2a)^{n-1}[x+(n-2)a]$.用数学归纳法证明.设 D_{n-1} 成立，即有 $D_{n-1}=(x-2a)^{(n-1)-1}[x+(n-1-2)a]$，则

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a & a \\ a & x-a & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a & a \\ a & a & a & \cdots & a & x-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a & a+0 \\ a & x-a & a & \cdots & a & a+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a & a+0 \\ a & a & a & \cdots & a & (x-2a)+a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a & a \\ a & x-a & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a & a \\ a & a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a & 0 \\ a & x-a & a & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a & 0 \\ a & a & a & \cdots & a & x-2a \end{vmatrix}$$

$=a(x-2a)^{n-1}+(x-2a)D_{n-1}$.

由假设　$D_n=a(x-2a)^{n-1}+(x-2a)(x-2a)^{n-2}[x+(n-3)a]$

$=(x-2a)^{n-1}[a+x+(n-3)a]$

$=(x-2a)^{n-1}[x+(n-2)a]$.

因此对任意自然数 n 都有 $D_n=(x-2a)^{n-1}[x+(n-2)a]$.

解法 7　辅助行列式法.

解题程序：1) 在行列式 D 的各元素中加上一个数 x，使新行列式 D_* 除主对角线外，其余元素均为 0；2) 计算 D_* 的主对角线各元素的代数余子式 $A_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$；3) $D=D_*-x\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}$(该结论的证明见例 24 中 1)).

在 D_n 的各元素上加上$(-a)$后，则有$(D_n)_*=\begin{vmatrix} x-2a & & & & \\ & x-2a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x-2a \end{vmatrix}=$

$(x-2a)^n$.

$$A_{11}=(x-2a)^{n-1}, A_{22}=\cdots=A_{nn}=(x-2a)^{n-1},$$

$$\begin{aligned} D_n &= (D_n)_* - (-a)\sum_{i=1}^{n} A_{ii} = (x-2a)^n + na(x-2a)^{n-1} \\ &= (x-2a)^{n-1}[x+(n-2)a]. \end{aligned}$$

点评 例 11、例 12 既属于各行(列)和相等的行列式,也属于除主对角线外其余元素都相同的行列式,因而也可采用辅助行列式法计算.

类型Ⅳ 除主对角线外其余元素全相同(或成比例).

例 13 证明

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

证明 证法 1 加边法.

将左边的行列式添加一行一列,得 $n+1$ 级行列式.

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\cdots\cdots \\ r_{n+1}-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \text{(爪型)}$$

$$\xlongequal[\substack{c_1+\frac{1}{a_2}c_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_1+\frac{1}{a_n}c_{n+1}}]{c_1+\frac{1}{a_1}c_2} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

证法 2　拆行(列)法.

$$
\text{左边}=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1+0 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1+0 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}
$$

$$
=a_2a_3\cdots a_n+a_1\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}
$$

$$
=a_2a_3\cdots a_n+a_1\begin{vmatrix}1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}
$$

$$
=a_2a_3\cdots a_n+a_1a_2a_3\cdots a_n\left(1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).
$$

证法 3　化爪型行列式.

各行都减去第 n 行,然后把第 i 行的 $-\frac{1}{a_i}$ 倍都加到第 n 行上($i=1,2,\cdots,n$).

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\cdots\cdots \\ r_n-\frac{1}{a_{n-1}}r_{n-1}}]{\substack{r_n-\frac{1}{a_1}r_1 \\ r_n-\frac{1}{a_2}r_2}} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+a_n+a_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=\text{右边}.$$

证法 4　拆行(列)法.

行列式对角线上元素均为两数之和 $1+a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$其余位置上的元素可视为 $1+0$,这样行列式的每列均为两数之和的形式.利用行列式性质,原行列式可分作 2^n 个行列式,其中包含两个或两个以上列为 1 的行列式其值为零,只剩下 $n+1$ 个行列式不为零.

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+a_2 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+a_3 & \cdots & 1+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & a_2 & & & \\ 1 & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & a_n \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_1 & & & & & 1 \\ & a_2 & & & & 1 \\ & & a_3 & & & 1 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & 1 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n + a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = \text{右边}.$$

证法 5　归纳法(略).

证法 6　辅助行列式法.

将左边的行列式 D_n 各元素上都加(-1)得

$$(D_n)_* = \begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

计算$(D_n)_*$的主对角线上元素的代数余子式:

$$A_{11} = a_2 a_3 \cdots a_n, A_{22} = a_1 a_3 \cdots a_n, \cdots, A_{nn} = a_1 \cdots a_{n-1},$$

所以,左边$=(D_n)_* - (-1) \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = a_1 a_2 \cdots a_n + a_2 a_3 \cdots a_n$

$$+ a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = \text{右边}.$$

点评　除主对角线外其余元素都相同的行列式均可采用辅助行列式法计算.辅导行列式法的具体步骤见例 12 的解法.

例 14　计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0).$$

解　将 D 加上一行一列构成 $n+1$ 级行列式.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\cdots\cdots \\ r_n - r_1}]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{再加边}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots\cdots\cdots \\ c_{n+2} - c_1}]{\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2 - \frac{1}{2a_1}c_3 - \frac{1}{2a_2}c_4 - \cdots - \frac{1}{2a_n}c_{n+2}]{c_1 + \frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{2}c_4 + \cdots + \frac{1}{2}c_{n+2}} \begin{vmatrix} 1 - \frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{a_1 + \cdots + a_n}{2} & 1 - \frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{理展开}]{\text{按拉普拉斯定}} (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 - \frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} \\ \frac{a_1 + \cdots + a_n}{2} & 1 - \frac{n}{2} \end{vmatrix}$$

$$=(-2)^{n-2}a_1a_2\cdots a_n\left[(n-2)^2-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_i}{a_j}\right].$$

例 15 计算 n 阶行列式.

$$D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}.$$

解 先拆行,再用递推法.

$$D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & 0+a \\ -a & x & a & \cdots & a & 0+a \\ -a & -a & x & \cdots & a & 0+a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & (x-a)+a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & a \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & 0 \\ -a & x & a & \cdots & a & 0 \\ -a & -a & x & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+a & 2a & 2a & \cdots & 2a & a \\ 0 & x+a & 2a & \cdots & 2a & a \\ 0 & 0 & x+a & \cdots & 2a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(x-a)D_{n-1}$$

$$=a(x+a)^{n-1}+(x-a)D_{n-1},$$

即 $D_n=a(x+a)^{n-1}+(x-a)D_{n-1}$. 同理得: $D_n=(x+a)D_{n-1}-a(x-a)^{n-1}$. 于是

$$\begin{cases}(x+a)D_n=a(x+a)^n+(x+a)(x-a)D_{n-1}, & (1)\\ (x-a)D_n=-a(x-a)^n+(x+a)(x-a)D_{n-1}. & (2)\end{cases}$$

(1) - (2)得：$2aD_n = a(x+a)^n + a(x-a)^n$.

当 $a\neq 0$ 时，$D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n]$.

当 $a=0$ 时，显然 $D_n = x^n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n]$. 故

$$D_n = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n].$$

点评 本例题中所用的递推法为间接递推法，它是变换原行列式以构造出关于 D_n 和 D_{n-1} 的方程组，消去 D_{n-1} 就可解得 D_n. 这里可以看到必须先将原行列式进行拆项，然后通过计算，导出递推公式 $D_n = f(D_{n-1})$.

例 16 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix} \quad (\lambda_i \neq 0 \quad i=1,2,\cdots,n).$$

解 升阶化三角形.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_1+\lambda_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_3-c_1 \\ \cdots\cdots \\ c_{n+1}-c_1}]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} \quad (\text{爪型})$$

$$\xlongequal[\substack{r_1+\frac{1}{\lambda_2}r_3 \\ \cdots\cdots \\ r_1+\frac{1}{\lambda_n}r_{n+1}}]{r_1+\frac{1}{\lambda_1}r_2} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i} & 0 & & & \\ a_1 & \lambda_1 & & & \\ a_2 & & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n & & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right).$$

类型V　可利用范德蒙行列式计算的行列式.

例 17　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

解　作如下行列式使之配成范德蒙行列式：

$$p(y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

此处 y 是变数，由此可知 D_n 是 $p(y)$ 的元素 y^{n-1} 的余子式.

$$p(y)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)[y^n+(-1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)y^{n-1}+\cdots].$$

另一方面将 $p(y)$ 按它的第 $n+1$ 列展开即得

$$p(y)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)y^n+(-1)^{n+n+1}D_ny^{n-1}+\cdots.$$

比较 $p(y)$ 中关于 y^{n-1} 的系数即得：

$$D_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

点评　例 17 采用升阶的想法比较自然，但是插入的最后一列（y 的幂）却不是马上可以想到的. 一般来说，升阶法较难把握，只有在其他方法不易解决或者明显地可用升阶法解决时才考虑用此方法.

例 18　计算下面 $n-1$ 阶行列式

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix} 2^n-2 & 2^{n-1}-2 & \cdots & 2^3-2 & 2 \\ 3^n-3 & 3^{n-1}-3 & \cdots & 3^3-3 & 6 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n^n-n & n^{n-1}-n & \cdots & n^3-n & n^2-n \end{vmatrix}.$$

解　用加边法将行列式化成范德蒙行列式.

$$D_{n-1}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&2^n-2&2^{n-1}-2&\cdots&2^3-2&2\\0&3^n-3&3^{n-1}-3&\cdots&3^3-3&6\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&n^n-n&n^{n-1}-n&\cdots&n^3-n&n^2-n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3+3r_1\\ \cdots\cdots\\ r_n+nr_1}]{r_2+2r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\2&2^n&2^{n-1}&\cdots&2^3&2^2\\3&3^n&3^{n-1}&\cdots&3^3&3^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&n^n&n^{n-1}&\cdots&n^3&n^2\end{vmatrix}$$

$$=n!\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2^{n-1}&2^{n-2}&\cdots&2^2&2\\1&3^{n-1}&3^{n-2}&\cdots&3^2&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&n^{n-1}&n^{n-2}&\cdots&n^2&n\end{vmatrix}$$

$$=n!\ (-1)^{(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2&2^2&\cdots&2^{n-2}&2^{n-1}\\1&3&3^2&\cdots&3^{n-2}&3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&n&n^n&\cdots&n^{n-2}&n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod_{k=1}^{n}(k!).$$

类型Ⅵ　其他形式的行列式.

例 19　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&9-x^2\end{vmatrix}.$$

解　析因子法.

D 可以看作关于 x 的多项式 $f(x)$，观察 D 的一次因式，当 $x=\pm1$ 时

$$f(\pm1)=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&1&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&8\end{vmatrix}=0.$$

当 $x=\pm 2$ 时，$f(\pm 2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0.$

可见 $f(x)$ 有因子：$x-1, x+1, x-2, x+2$. 另外从行列式定义可知 D 中含有 x 的最高次数为 4，故

$$D=c(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

令 $x=0$ 直接得 $D=-12$，于是 $c=-3$. 故

$$D=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

例 20 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

解 观察行列式的特点，当 x 取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 时，行列式都有两行相同，因而此时的行列式的值为零，可将行列式看作关于 x 的多项式，且此多项式有因式 $x-a_1, x-a_2, \cdots, x-a_n$，故可设：

$$D=c(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

D 中 x 的最高次项为 x^n，系数为 1，故 $c=1$，即行列式 $D=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$

点评 例 19、例 20 的求法采用了析因子法，其方法为：

如果行列式 D 中有一些元素是变数 x(或某个参变数)的多项式，那么可以将行列式 D 当作一个多项式 $f(x)$，然后对行列式施行某些变换，求出 $f(x)$ 的互素的一次因式，使得 $f(x)$ 与这些因式的乘积 $g(x)$ 只相差一个常数因子 c，根据多项式相等的定义，比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的某一项的系数，求出 c 值，便可求得 $D=cg(x)$.

例 21 设在 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中 $a_{ij}=-a_{ji}$ $\quad i,j=1,2,\cdots,n$，证明：当 n 是奇数时，$D=0$.

证 因为 $a_{ij}=-a_{ji}$，故 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0$.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=$$

$-D$，得 $D=0$.

例 22 计算

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix},$$

这里是对所有 n 级排列求和.

解 解法 1 $\sum$中包含 $n!$ 个 n 阶行列式，交换每个行列式中的第 1,2 两列，所得 $n!$ 个行列式的和仍是 D 的 $n!$ 个行列式之和，又因为交换两列后，行列式变号，因而

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}=-\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_2} & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_2} & a_{2j_1} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_2} & a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}=-D.$$

因而 $D=0$.

解法 2 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则有 $\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}=$

$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}D$.

因所有 n 级排列中奇偶排列各半，在和中 D 前加正号与加负号的个数相等. 故 $D=0$.

例 23 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

证明 根据微分运算法则知

$$\text{左端} = \Big[\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}(t)a_{2j_2}(t)\cdots a_{nj_n}(t)\Big]'$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} [a'_{1j_1}(t)a_{2j_2}(t)\cdots a_{nj_n}(t) + a_{1j_1}(t)a'_{2j_2}(t)\cdots a_{nj_n}(t) + \cdots + a_{1j_1}(t)a_{2j_2}(t)\cdots a'_{nj_n}(t)]$$

$$= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a'_{1j_1}(t)a_{2j_2}(t)\cdots a_{nj_n}(t) + \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}(t)a'_{2j_2}(t)\cdots a_{nj_n}(t) + \cdots + \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}(t)a_{2j_2}(t)\cdots a'_{nj_n}(t) = \text{右端}.$$

例 24 证明

1) $$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式；

2) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

证明 1) 证法 1 加边法.

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ 0 & a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ \cdots\cdots \\ r_n-r_1 \\ r_{n+1}-r_1}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 行}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{1+(n+1)} x \begin{vmatrix} -1 & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ -1 & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{均按第 1 列展开}]{\text{从第 2 项开始}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ x \sum_{i=1}^{n} A_{i1} + x \sum_{i=1}^{n} A_{i2} + \cdots + x \sum_{i=1}^{n} A_{in}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \text{右边}.$$

证法 2　拆行(列)法.

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= D + x \sum_{i=1}^{n} A_{i1} + \cdots + x \sum_{i=1}^{n} A_{in}$$

$$=D+x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\text{右边}.$$

2) 令 1)中的 $x=1$,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n}+1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & a_{2n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn}+1 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n} \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

例 25 计算 $f(x+1)-f(x)$,其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

解 解法 1 化三角形法.

$$f(x+1)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2+2x+1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3+3x^2+3x+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n+nx^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+1 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1}+(n+1)x^n+\cdots+1 \end{vmatrix},$$

$$f(x+1)-f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2x+1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 3x^2+3x+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & nx^{n-1}+\cdots+1 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n+\cdots+1 \end{vmatrix}.$$

将上面行列式第 1 列乘 -1,第二列乘 $-x$,第三列乘 $-x^2$,…第 n 列乘 $-x^{n-1}$全部加到最后一列得

$$f(x+1)-f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & 0 \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n \end{vmatrix}$$

$$=(n+1)!\ x^n.$$

例 26 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}.$$

解 解法 1 降阶化三角形

当 $n\geqslant 2$ 时将第 2 行以后的各行都减去最后一行,然后第 2 列以后的各列都加到最后一列,再按第 1 列展开.

$$
\text{原式} = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \lambda & a & a & \cdots & a & (n-1)a \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix}
$$

$$
= \lambda \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix} +
$$

$$
(-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & (n-1)a \\ \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= \lambda(\alpha-\beta)^{n-2}[\alpha+(n-2)\beta] + (-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}(n-1)ab(\alpha-\beta)^{n-2}
$$

$$
= (\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)ab].
$$

$n=1$ 时，$D_n=\lambda$.

解法 2 化三角形法.

先设 $a\neq 0$，而且 $\alpha\neq\beta$，先用 $-\frac{\beta}{\alpha}$ 乘第一行后加到其余各行，继续用 $-\frac{ab-\lambda\beta}{a(\alpha-\beta)}$ 乘各列后都加到第 1 列得：

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda - \dfrac{(n-1)(ab-\lambda\beta)}{\alpha-\beta} & a & \cdots & a \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$= \left[\lambda - \frac{(n-1)(ab-\lambda\beta)}{\alpha-\beta}\right](\alpha-\beta)^{n-1}$$

$$= (\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha + (n-2)\lambda\beta - (n-1)ab].$$

当 $a=0$ 或 $\alpha=\beta$ 时,可直接验算,上面的结果也是对的.

解法 3　利用拉普拉斯定理展开.

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & (n-1)a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha+(n-2)\beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & (n-1)a \\ b & \alpha+(n-2)\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha + (n-2)\lambda\beta - (n-1)ab].$$

例 27　计算 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

解　将 D_n 按第一列展开,得

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}. \tag{1}$$

设 α,β 为二次方程 $x^2 - ax + bc = 0$ 的根,则

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}, \qquad \beta = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2},$$

且有 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = bc$,把它代入(1)式,得

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}).$$

由此递推下去,有

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \cdots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1).$$

由于 $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 - bc, D_1 = a$,故有

$$D_2 - \alpha D_1 = a^2 - bc - \alpha a = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - \alpha(\alpha + \beta) = \beta^2,$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n. \tag{2}$$

同理可得

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^n. \tag{3}$$

当 $\alpha \neq \beta$,即 $a^2 = 4bc$ 时,则由(3)·α − (2)·β 得

$$(\alpha - \beta)D_n = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}.$$

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{(a + \sqrt{a^2 - 4bc})^{n+1} - (a - \sqrt{a^2 - 4bc})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{a^2 - 4bc}}.$$

当 $\alpha = \beta$,即 $a^2 = 4bc$ 时,则由(2)得

$$\begin{aligned} D_n &= \alpha^n + \alpha D_{n-1} = \alpha^n + \alpha(\alpha^{n-1} + \alpha D_{n-2}) = 2\alpha^n + \alpha^2 D_{n-1} = \cdots \\ &= (n-1)\alpha^n + \alpha^{n+1} D_1 = (n-1)\alpha^n + \alpha^{n-1} \cdot 2a \\ &= (n+1)\alpha^n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

例 28 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

解 用行列式的乘法计算

$$D^2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4.$

$D=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ 但 D 中 a^4 的系数为 1,故必须取正号,于是

$$D=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

二、关于代数余子式的计算

例 29 已知 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & & 2n-1 \\ 1 & 2 & & & & \\ 1 & & 3 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & n \end{vmatrix},$$

求其代数余子式 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$ 之和.

解 构造行列式,将 $|A|$ 中第 1 行的元素均换为 1,则

$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=1\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+\cdots+1\cdot A_{1n}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 2 & & & & \\ 1 & & 3 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & n \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\cdots\cdots \\ r_1-\frac{1}{n}r_n}]{r_1-\frac{1}{2}r_2} \begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 2 & & & & \\ 1 & & 3 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & n \end{vmatrix}$$

$$=n!\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right).$$

点评 改变 a_{ij} 后 A_{ij} 的值不变,构造一个行列式,使所要求的代数余子式在两行列式中相同,通过新行列式计算所要求的代数余子式之和.

例 30 已知 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

求 $|A|$ 的所有元素的代数余子式之和.

解 $|A|=1$ 又

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & & & \\ & 1 & \cdots & 1 & & \ddots & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & & \ddots \\ & & & 1 & & & & 1\end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-1}-r_n}]{\substack{r_1-r_2 \\ r_2-r_3}}$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|ccccc}1 & & & & 1 & -1 & & & \\ & \ddots & & & & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & & & \ddots & -1 \\ & & & 1 & & & & & 1\end{array}\right)$$

即 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1\end{pmatrix}$,

故 $A^{*}=|A| \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1\end{pmatrix}$,从而

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}=n+[-(n-1)]=1.$$

点评 因为 A 的伴随矩阵 A^{*} 恰是由 $|A|$ 的全部代数余子式组成,因此 A^{*} 的所有元素的和就是 $|A|$ 的所有代数余子式的和.由于 $A^{*}=|A|\cdot A^{-1}$,因而可以用矩阵的初等变换求出 A^{-1},再求 A^{*},然后将 A^{*} 的各元素相加即得到 $|A|$ 的所有代数余子式之和(也可求部分代数余子式之和).

三、克拉默法则的应用

例 31 解方程组

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\cdots+a_1^{n-1}x_n=1, \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+\cdots+a_2^{n-1}x_n=1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\cdots+a_n^{n-1}x_n=1,\end{cases}$$ 其中 $a_i \neq a_j\ (i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n)$.

解 该方程组的系数行列式恰为 n 阶范德蒙行列式的转置行列式,因为 a_i

$\neq a_j(i\neq j)$,故 $D=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0$.由克拉默法则知方程组有唯一解.

$$x_i=\frac{D_i}{D}\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

其中 D_i 为常数项$(1,1,\cdots,1)$取代 D 中的第 i 列所构成的行列式.由行列式的性质易知:

$$D_1=D,D_2=\cdots=D_n=0.$$

故原方程组的解为$(1,0,0,\cdots,0)$.

例 32 设有线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3,\\3x_1-x_2-kx_3+15x_4=3,\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=1,\end{cases}$$

问 k 取何值时方程组有唯一解?

解 为使方程组有唯一解,必须使系数行列式 $D\neq 0$,即

$$D=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&3&6&1\\3&-1&-k&15\\2&-5&-10&12\end{vmatrix}=6(2-k)\neq 0,$$

即只要 $k\neq 2$,方程组有唯一解.

例 33 若齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+ax_4=0,\\x_1+2x_2+x_3+x_4=0,\\x_1+x_2-3x_3+x_4=0,\\x_1+x_2+ax_3+bx_4=0\end{cases}$$

有非零解,则 a,b 应满足什么条件?

解 齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式 $D=0$,即

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&a\\1&2&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&a&b\end{vmatrix}=-4b+(a+1)^2=0,$$

也就是当 $b=\dfrac{(a+1)^2}{4}$时,该齐次线性方程组有非零解.

例 34 设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 用线性方程组的理论证明,若是 $f(x)$有 $n+1$ 个不同的根,那么 $f(x)$是零多项式.

证明 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 是 $f(x)$ 的 $n+1$ 个不同的根,则有齐次线性方程组

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \cdots + c_n x_1^n = 0, \\ c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \cdots + c_n x_2^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 + c_1 x_{n+1} + c_2 x_{n+1}^2 + \cdots + c_n x_{n+1}^n = 0, \end{cases}$$

其系数行列式的转置是一个 $n+1$ 阶的范德蒙行列式. 而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 互不相同,故 $D \neq 0$. 方程组只有零解,即 $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$, $f(x)$ 是零多项式.

例 35 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是数域 P 中互不相同的数, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是数域 P 中任意一组给定的数,用克拉默法则证明:数域 P 上存在唯一的次数小于 n 的多项式 $f(x)$,使 $f(a_i) = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$.

证明 设 $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$.

由 $f(a_i) = b_i$,得:

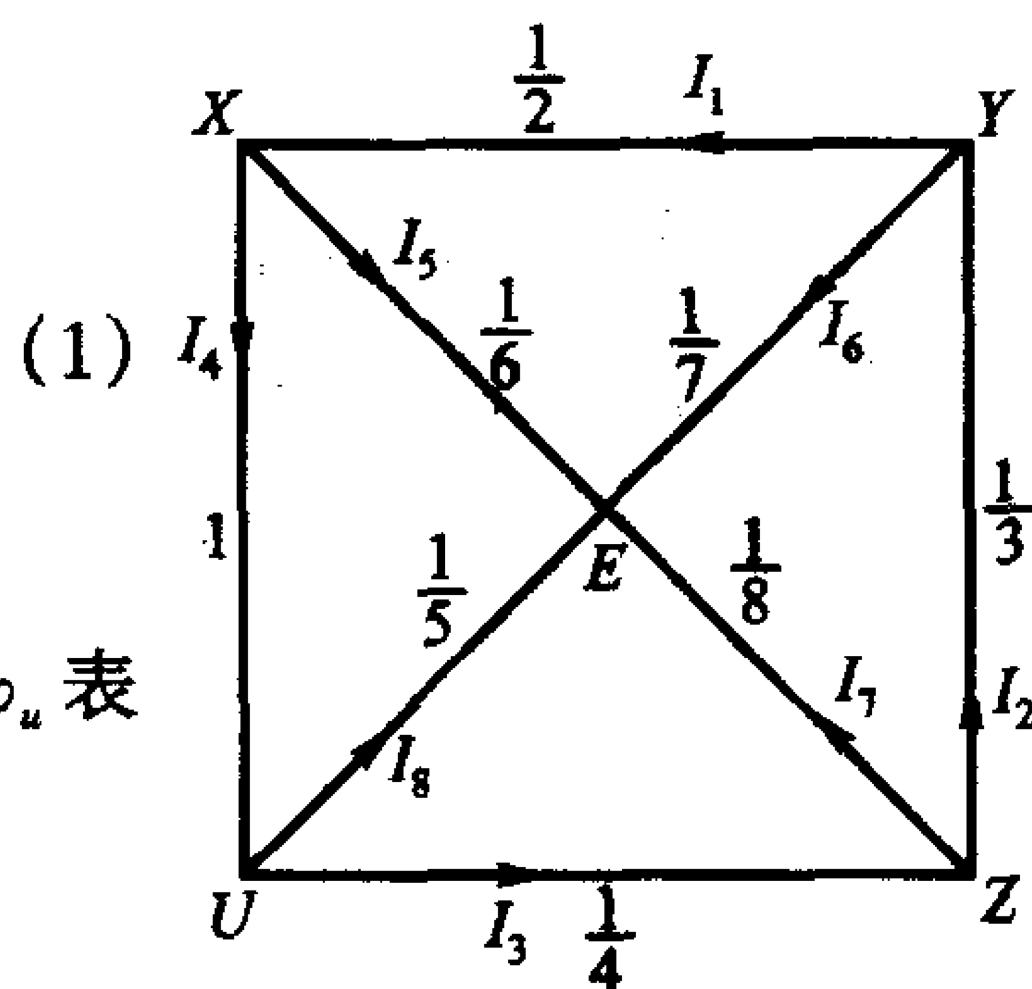
$$\begin{cases} c_0 + c_1 a_1 + c_2 a_1^2 + \cdots + c_{n-1} a_1^{n-1} = b_1, \\ c_0 + c_1 a_2 + c_2 a_2^2 + \cdots + c_{n-1} a_2^{n-1} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 + c_1 a_n + c_2 a_n^2 + \cdots + c_{n-1} a_n^{n-1} = b_n. \end{cases}$$

把它看成关于 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 的线性方程组,由于系数行列式为一范德蒙行列式的转置行列式,由题设它不等于零,故方程组有唯一解,从而所求多项式是唯一的.

例 36 右图表示一电路网络,每条线上标出的数字是电阻,E 点接地,由 X, Y, U, Z 点通入电流的强度皆为 100 安培,求这四点的电位(用克希霍夫定律).

解 设电流如图所示,则有

$$\begin{cases} -I_1 + I_4 + I_5 = 100, \\ I_1 - I_2 + I_6 = 100, \\ I_2 - I_3 + I_7 = 100, \\ I_3 - I_4 + I_8 = 100. \end{cases} \quad (1)$$



若 X, Y, Z, U 点的电位分别用 $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_u$ 表示,则由 $I = \dfrac{U}{R}$ 可得:

$I_1 = 2\varphi_y - 2\varphi_x$, $I_2 = 3\varphi_z - 2\varphi_y$,

$I_3 = 4\varphi_u - 4\varphi_z$, $I_4 = \varphi_x - \varphi_u$,

$I_5 = 6\varphi_x$, $I_6 = 7\varphi_y$,

$$I_7 = 8\varphi_z, I_8 = 5\varphi_u.$$

代入(1)得方程组：

$$\begin{cases} 9\varphi_x - 2\varphi_y - \varphi_u = 100, \\ -2\varphi_x + 12\varphi_y - 3\varphi_z = 100, \\ \qquad -3\varphi_y + 15\varphi_z - 4\varphi_u = 100, \\ -\varphi_x \qquad\qquad -4\varphi_z + 10\varphi_u = 100, \end{cases} \tag{2}$$

解方程组(2)得：

$$\varphi_x = \frac{210100}{12907}(\text{伏}), \varphi_y = \frac{188400}{12907}(\text{伏}),$$

$$\varphi_z = \frac{183300}{12907}(\text{伏}), \varphi_u = \frac{223400}{12907}(\text{伏}).$$

§2.3 习　　题

1. 决定以下 9 级排列的逆序数，从而决定它们的奇偶性：

1) 134782695；　2) 217986354；　3) 987654321；　4) 523146879.

2. 选择 i 与 k 使：

1) $1274i56k9$ 成偶排列；　2) $1i25k4897$ 成奇排列.

3. 写出把排列 12435 变成排列 25341 的那些对换.

4. 决定排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数，并讨论它的奇偶性.

5. 计算排列 $2k,1,2k-1,2,\cdots,k+1,k$ 的逆序数.

6. 假设排列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的逆序数为 k，排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

7. 在 6 阶行列式中 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$，$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$，$a_{21}a_{13}a_{32}a_{55}\cdot a_{64}a_{46}$ 这三项应带有什么符号？

8. 写出 4 阶行列式中所有带有负号并且包含因子 a_{23} 的项.

9. 按定义计算行列式：

1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

10. 由行列式定义证明：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

11. 由行列式定义计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数，并说明理由.

12. 由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$，证明 n 级奇偶排列各半.

13. 设

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 是互不相同的数.

1) 由行列式定义说明 $p(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式；

2) 由行列式性质求 $p(x)$ 的根.

14. 考查下列行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_n} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ni_1} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_n} \end{vmatrix},$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，这两个行列式之间有什么关系？

15. 计算下面的行列式

1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$； 2) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$； 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

16. 计算下列行列式

1) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；

2) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$；

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$； 4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$；

5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$； 6) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

17. 证明

1) $$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1};$$

2) $$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta};$$

3) $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha.$$

18. 计算下列 n 阶行列式:

1) $$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} (2n\ 阶);$$

2) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix};$$

3) $$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix};$$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 1+x & y & & & \\ z & 1+x & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & y \\ & & z & & 1+x \end{vmatrix}$,但 $x = yz$;

9) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$.

19. 计算 n 阶行列式:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 2 & & & & \\ 1 & 0 & 3 & 3 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & & n \\ -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

20. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

21. 计算下列行列式

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+2^2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+2^n \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 2 \end{vmatrix}$（$n$ 阶）；

9) $\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$；

10) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$；

11) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (n-1) \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & (n-1) & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

12) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & \cdots & a_3-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$.

22. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

23. 计算 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a_1-2 \\ a_2-2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_3-2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n-2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \quad (a_i \neq 3, i=1,2,\cdots,n).$$

24．用克拉默法则解下列线性方程组：

1) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_2 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ x_4 + 5x_5 = 1; \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4; \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$$

25. 求一个二次多项式 $f(x)$,使

$$f(1)=0, f(2)=3, f(-3)=28.$$

26. 设 a,b,c,d 是不全为零的实数,证明:方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0, \\ bx_1-ax_2+dx_3-cx_4=0, \\ cx_1-dx_2-ax_3+bx_4=0, \\ dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0 \end{cases}$$

只有零解.

27. 设水银密度 h 与温度 t 的关系为:

$$h=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3.$$

由实验测得以下数据

t	0°	10°	20°	30°
h	13.60	13.57	13.55	13.52

求 $t=15°$,40°时水银密度(精确到小数两位).

§2.4 习题答案与提示

1. 答:1) 10,偶. 2) 18,偶. 3) 36,偶. 4) 7,奇.

2. 答:1) $i=8,k=3$. 2) $i=3,k=6$.

3. 答:(1,2),(1,5),(3,4).

4. 答:$\tau(n(n-1)\cdots21)=\frac{1}{2}n(n-1)$;当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时为奇排列.

5. 答:k^2.

6. 答:$\frac{n(n-1)}{2}-k$.提示:$\tau(x_1x_2x_3\cdots x_n)+\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_1)=\frac{n(n-1)}{2}$.

7. 答:1) 正号.2) 正号.3) 负号.

8. 解:将含有元素 a_{23}的项中各元素按行的自然顺序排列,其列标所组成排列的第二个位置上是3,这种排列共有6个:

1324,1342,2341,2314,4312,4321,

其中奇排列是1324,2341,4312,所以所求的项为:$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$;$-a_{12}a_{23}a_{34}\cdot a_{41}$;$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

9. 答:1) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$. 2) $(-1)^{n-1}n!$. 3) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

10. 提示:展开式中任一项都含有后三行处于不同列的三个元素,这三个元素至少有一个为零.

11. 答:x^4的系数为2,x^3的系数为-1.

12. 提示:行列式每一项的绝对值都是1,又行列式的值为零,所以带正号的项与带负号的项个数相等,当行下标按自然顺序排列,各项符号由列下标所成排列的奇偶性确定,因此奇偶排列各半.

13. 答:1) $p(x)$只有第1行中含有x的幂次,而且最高次幂为$n-1$,且x^{n-1}的系数是一个范德蒙行列式,不等于零.

2) $a_1,a_2,\cdots,a_n$是$p(x)$的所有根.

14. 答:$D_1=(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}D$.

15. 答:1) -294×10^5.　2) $-2(x^3+y^3)$.　3) 48.　4) 160.

16. 答:1) x^2y^2.提示:从第一列起依次前列减后列提出第1列中的x和第3列的y,再把它们的-1倍加到第4列上.

2) 0.提示:C_4-C_1,C_3-C_2.

3) 1.提示:从第4行开始依次下一行减上一行.

4) 0.提示:从最后一行开始下一行减上一行,然后再重复一遍上述过程.

5) -483.6) $\frac{3}{8}$.

17. 提示:1) 从第一行起前行乘以x加到后一行,再按最后一行展开.

2) 用归纳法或间接递推法.

3) 用归纳法(第二归纳法).

18. 答:1) $(a^2-b^2)^n$.提示:用递推法.

2) $\prod_{i=1}^{n} a_i+(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i$.提示:以第一列展开.

3) $1+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_1a_2\cdots a_i$.提示:把第一列的元素看成两项的和进行拆列,然后对第一个行列式从最后一行开始每行往上一行加,第二个行列式按最后一列展开.

4) $2^{n+1}-1$.

5) 1. 提示:各行加到第一行,再按第一行展开.

6) $n+1$.提示:按第一行展开得递推公式$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$,即$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\cdots=D_2-D_1=1,D_n=D_{n-1}+1=\cdots=D_1+(n-1)=n+1$.

7) a^n-a^{n-2}.

8) $1+x+x^2+\cdots+x^n$,提示:递推$D_n-D_{n-1}=x(D_{n-1}-D_{n-2})=\cdots=x^n$,$D_n=D_{n-1}+x^n=\cdots=1+x+\cdots+x^n$.

9) $n!\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$.

19. 答:1) $n!\left[\frac{(-1)^2}{1}+\frac{(-1)^3}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

提示:按第 n 行展开 $D_n=(-1)^{n+1}(n-1)!+nD_{n-1}$ 递推.

2) $a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. 提示:按第一列展开得递推公式. $D=xD_{n-1}+a_n$,也可用归纳法等.

3) $\frac{1}{2}n(n+1)$. 提示:各列加到第一列上,然后按第一列展开.

20. 答:$D_n=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

21. 答:1) $(-2)(n-2)!$. 提示:第一行乘(-1)加到其他各列再按第二列展开. 也可以用辅助行列式法.

2) $(-1)^{n+1}(n-1)\cdot 2^{n-2}$. 提示:从第二行起将第 i 行乘(-1)加到第 $i-1$ 行($i=2,3,\cdots,n$),然后将最后一列分别加到第 $1,2,\cdots,n-1$ 列上,再按第一列展开.

3) $D_n=\frac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}$ $(y\neq z)$ 当 $y=z$ 时,$D_n=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$.

提示:用间接递推法,解方程组$\begin{cases}D_n=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1},\\ D_n=(x-y)D_{n-1}+y(x-z)^{n-1}\end{cases}$,求得 D_n.

4) $n!$.

5) $1+\sum_{i=1}^{n}a_i$. 提示:将各列加到第一列提出公因子,再用第一列乘以$(-a_j)$加到第 j 列上($j=2,3,\cdots,n$).

6) $(1-x)(2-x)\cdots[(n-1)-x]$. 提示:在行列式的各元素上都加上$(-1)$后所得行列式 $D_*=0$, $A_{11}=(1-x)(2-x)\cdots[(n-1)-x]$, $A_{22}=A_{33}=\cdots=A_{nn}=0$.

利用例题分析例 24 中 1)的结论.

$D=D_*-(-1)\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$,即得.

7) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[1+x\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\right]$. 提示:方法同 6). 每个元素上加$(-x)$得

$D_*=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $\sum_{i=1}^{n+1}A_{ii}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}(1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n})=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$,

$$D = D_* - \sum_{i=1}^{n+1} A_{ii}.$$

8) $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$. 提示：用 6)的方法，或用各列都加到第一列上，然后 $2 \sim n+1$ 各列减第一列乘 $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ 的方法.

9) $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)(1-m)^{n-1}$. 提示：各列都加到第 1 列上.

10) $n=1$ 时 $D = 1 + x_1 y_1$，$n=2$ 时 $D = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$. $n \geqslant 3$ 时，$D = 0$.

11) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \dfrac{(n+1)n^{n-1}}{2}$. 提示：各列加到第一列上提取公因子，再按第 1 列展开，得到一个各列元素之和相等的 $n-1$ 阶行列式.

12) 当 $n=1$ 时 $D = a_1 - b_1$，$n=2$ 时 $D = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$，$n \geqslant 3$ 时 $D = 0$. 提示：第一行乘 -1 分别加到第 2 行第 3 行上.

22. 答：$a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n+1} \left(\dfrac{b_i}{a_i} - \dfrac{b_j}{a_j}\right) = \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n+1} (a_j b_i - a_i b_j)$.

提示：每行提出 a_i^n $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 变为范德蒙行列式.

23. 答：$(-1)^{n+1}\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i - 3}\right](a_1 - 3)\cdots(a_n - 3)$.

提示：加边法，第一行都加 1，第一列除第一个元素外其余都加 0，第一行乘 -1 分别加到其余各行，然后再用 $\dfrac{1}{a_i - 3}$ 乘第 i 列 $(i = 2, 3, \cdots, n)$ 加到第一列上，用 $\dfrac{1}{a_1 - 3}$ 乘第 $n+1$ 列加到第 1 列上，按第 1 列展开.

24. 答：1) $D = -70$，$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = -70$，$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

2) $D = 324$，$D_1 = 324$，$D_2 = 648$，$D_3 = -324$，$D_4 = -648$. 方程组有唯一解：$x_1 = 1$，$x_2 = 2$，$x_3 = -1$，$x_4 = -2$.

3) 方程组有唯一解：$x_1 = 4$，$x_2 = -14$，$x_3 = -4$，$x_4 = 7$，$x_5 = 13$.

4) 方程组有唯一解：$x_1 = \dfrac{1507}{665}$，$x_2 = -\dfrac{229}{133}$，$x_3 = \dfrac{37}{35}$，$x_4 = -\dfrac{79}{133}$，$x_5 = \dfrac{212}{665}$.

5) $D = -153$，$x_1 = x_2 = -1$，$x_3 = 0$，$x_4 = 1$.

6) $D = 16$，$x_1 = x_3 = x_5 = 1$，$x_2 = x_4 = -1$.

25. 答：$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

26. 略.

27. 答：所求关系式为 $h = 13.60 - 0.042t + 0.00015t^2 - 0.0000033t^3$.
$h_{(t=15^\circ)} = 13.56$，$h_{(t=40^\circ)} = 13.48$.

第三章　线性方程组

§3.1　基 本 知 识

一、向量组的线性相关性

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 是数域 P 上的 n 维向量，若存在数域 P 中的数 k_1，$k_2,\cdots,k_s$，使得 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合，或说 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

2. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的每个向量都可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，若两个向量组可以互相线性表出，则称它们是等价的.

3. 向量组的等价是一个等价关系.

4. 线性相关性：若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，其中 $k_i\in$ 数域 P，$i=1,2,\cdots,s$，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 在数域 P 上线性相关；否则称其在 P 上线性无关.

5. n 维单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,\cdots,0,1)$ 线性无关，且任何 n 维向量都可由它线性表出.

6. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个向量可以被其余的向量线性表出.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是两个向量组，若

1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，

2) $r>s$，

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关.

8. (替换定理)设有向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s, \tag{2}$$

(1) 中每一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由(2)中的向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 线性表出且(1)组向量线性无关，则

1) $r\leqslant s$；

2) 必要时可对(2)中向量重新编号,使得用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 替换 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 后所得向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\qquad \boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s \tag{3}$$

与(2)等价.

二、向量组的极大无关组与秩

1. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 有部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$ 满足:

1) $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$ 线性无关,

2) 每个 $\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 都可由 $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$ 线性表出,则称 $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大线性无关组.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是含有非零向量的一个向量组,则其中一个极大线性无关组中所含的向量个数称为此向量组的秩.

3. 任何向量组都与其极大无关组等价.

4. 一个向量组若含有非零向量,则其任意两个极大线性无关组所含的向量个数相等.

5. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩为 n 的充分必要条件为:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

三、矩阵的秩

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的行秩,$\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

2. 一个矩阵中非零子式的最大级数称为这个矩阵的秩.矩阵的秩等于其行秩也等于其列秩.一个矩阵的秩用"秩 $\boldsymbol{A}$"或"$r(\boldsymbol{A})$"表示.

3. 以下变换称为矩阵的初等变换:

1) 交换矩阵的任意两行(列);

2) 用非零数 k 乘矩阵的某一行(列);

3) 用数 k 乘某一行(列)中所有元素并加到另一行(列)上去.

4. 初等变换不改变矩阵的秩.对任何矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可经过初等变换化为以下标准形:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中主对角线上1的个数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

四、线性方程组

1. 线性方程组有解的判定定理:设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{4}$$

的系数矩阵与增广矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\overline{\boldsymbol{A}}$,则方程组(4)有解的充分必要条件为:秩($\boldsymbol{A}$)=秩($\overline{\boldsymbol{A}}$),

并且

1) 当秩($\boldsymbol{A}$)=秩($\overline{\boldsymbol{A}}$)$=r=n$ 时,(1)有唯一解;

2) 当秩($\boldsymbol{A}$)=秩($\overline{\boldsymbol{A}}$)$=r<n$ 时,(1)有无穷解;

对于齐次方程组($b_1=b_2=\cdots=b_s=0$),(4)总有解.(4)有非零解当且仅当秩 $\boldsymbol{A}<n$.

2. 解线性方程组的步骤:

1) 对增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施行行初等变换,将 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化成阶梯形矩阵 $\overline{\boldsymbol{B}}$(阶梯形矩阵不唯一);

2) 由 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 可知秩($\boldsymbol{A}$)与秩($\overline{\boldsymbol{A}}$)是否相等,从而判断原方程组是否有解,及判断有唯一解或有无穷多解;

3) 解出以 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 为增广矩阵的线性方程组(它与原方程组同解),在有解时,一般继续将阶梯形矩阵 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 通过行初等变换化为行简化阶梯形,所谓行简化阶梯形是指这样的矩阵,其每个非零行的首非零元为1,各行的首非零元的列标递增,零行在所有非零行的下方.注意当方程组有无穷多解时,必有 $n-r$ 个自由未知量.

五、线性方程组解的结构

1. 齐次线性方程组的一组解向量 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 称为它的一个基础解系,若

1) 它的任意解向量都能表成 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 的线性组合;

2) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为某一非齐次线性方程组的系数矩阵,则以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组称为原非齐次线性方程组的导出组.

3. 齐次线性方程组解向量的线性组合仍为该齐次线性方程组的解向量.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $s\times n$ 矩阵,则以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组有非零解

的充分必要条件为：秩 $\boldsymbol{A}<n$（且此时方程组的每个基础解系都含有 n - 秩（$\boldsymbol{A}$）个向量）. 特别地，含 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式等于零.

5. 非齐次线性方程组的一般解：如果 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 是非齐次线性方程组(4)的一个特解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系，则(4)的任意解 $\boldsymbol{\gamma}$ 都可以表成

$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意数.

*六、二元高次方程组

1. 称行列式

$$
\begin{array}{l}
m\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
n\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right.
\end{array}
\left|\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\
 & & & a_0 & a_1 & & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & & & \\
 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\
 & & & b_0 & b_1 & & \cdots & b_m
\end{array}\right|
$$

为多项式

$$
\begin{aligned}
f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_n,\\
g(x)&=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m
\end{aligned}
$$

（它们可以是零多项式）的结式，记为 $R(f,g)$.

2. 设

$$
\begin{aligned}
f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\\
g(x)&=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m
\end{aligned}
$$

是 $P[x]$ 中两个多项式，$m,n>0$，于是它们的结式 $R(f,g)=0$ **的充要条件是** $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $P[x]$ 中有非常数的公因式或它们的第一个系数 a_0,b_0 全为零.

3. 设 $f(x,y),g(x,y)$ 是两个复系数的二元多项式，求方程组

$$
\begin{cases}f(x,y)=0,\\ g(x,y)=0\end{cases}\tag{1}
$$

在复数域中的全部解，将 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 写成

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots+a_n(y),\\
g(x,y)&=b_0(y)x^m+b_1(y)x^{m-1}+\cdots+b_m(y),
\end{aligned}
$$

其中 $a_i(y),b_j(y),i=0,1,\cdots,n,j=0,1,\cdots,m$ 是 y 的多项式，把 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 看作是 x 的多项式，令

$$R_x(f,g)=\begin{vmatrix} a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \cdots & a_n(y) & & & \\ & a_0(y) & a_1(y) & \cdots & \cdots & a_n(y) & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ & & & a_0(y) & a_1(y) & \cdots & a_n(y) & \\ b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \cdots & b_m(y) & & & \\ & b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \cdots & b_m(y) & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ & & & b_0(y) & b_1(y) & \cdots & b_m(y) & \end{vmatrix}.$$

如果(x_0,y_0)是方程组(1)的一个复数解,则 y_0就是 $R_x(f,g)$的一个根;反过来,如果 y_0是 $R_x(f,g)$的一个复根,则 $a_0(y_0)=b_0(y_0)=0$,或存在一个复数x_0使(x_0,y_0)是方程组(1)的一个解.

§3.2 例 题

例 1 将向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表成向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合:

$\boldsymbol{\beta}=(1,2,1,1)',\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)',\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)',$

$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)',\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)'.$

解 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$即

$$\begin{aligned}(1,2,1,1)'&=x_1(1,1,1,1)'+x_2(1,1,-1,-1)'+x_3(1,-1,1,-1)'+x_4(1,-1,-1,1)'\\&=(x_1+x_2+x_3+x_4,x_1+x_2-x_3-x_4,\\&\quad x_1-x_2+x_3-x_4,x_1-x_2-x_3+x_4)'.\end{aligned}$$

于是得方程组:
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+x_2-x_3-x_4=2,\\x_1-x_2+x_3-x_4=1,\\x_1-x_2-x_3+x_4=1.\end{cases}$$

解得

$$x_1=\frac{5}{4},x_2=\frac{1}{4},x_3=-\frac{1}{4},x_4=-\frac{1}{4},$$

故 $\boldsymbol{\beta}=\frac{5}{4}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{1}{4}\boldsymbol{\alpha}_4.$

点评 一个向量能否由一个向量组线性表出,本质上等价于对应的非齐次线性方程组是否有解.

例 2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,n$,且行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

求证　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证明　证法 1　设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$,即

$$k_1(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})+k_2(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})+\cdots+k_n(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn})=\mathbf{0}.$$

由此得

$$(k_1a_{11}+k_2a_{21}+\cdots+k_na_{n1},k_1a_{12}+k_2a_{22}+\cdots+k_na_{n2},\cdots,$$
$$k_1a_{1n}+k_2a_{2n}+\cdots+k_na_{nn})=\mathbf{0}.$$

上式相当于以 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{n1}k_n=0, \\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{n2}k_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\cdots+a_{nn}k_n=0. \end{cases} \tag{1}$$

因为这个齐次方程组(1)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D' \neq 0,$$

故此方程组只有唯一解 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

证法 2(反证法)　假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中必有某一向量,不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是其余向量的线性组合,即有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

用 $-k_1,\cdots,-k_{i-1},-k_{i+1},\cdots,-k_n$ 分别乘以行列式 D 的第 $1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$ 各行后,都加到第 i 行上去,则 D 的第 i 行所有元素都变为零,故行列式 $D=0$,此与假设矛盾.

点评　证明一个向量组线性无关,通常采用两种基本证法:欲证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,只需证明:由 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 可以推出 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$,证法 1 属于这种方法;第二种是反证法,因线性相关与线性无关是两个互相排斥的概念,故在证明这类命题时,反证法具有基本的重要性.上面证法 2 就属于这种证法.当然我们还可以利用向量组的等价性、极大无关组、秩等方法证明向量组的线性相关性.例如,为判断 n 维向量空间 P^n 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$

的线性相关性,以这些向量的分量为列作矩阵 $\boldsymbol{A}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于向量组的个数 m,则该向量组线性相关,若秩 $\boldsymbol{A}$ 等于 m,则该向量组线性无关.

例 3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为 n 维向量,$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\cdots+\boldsymbol{a}_r$,$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_{r-1}$,证明:组Ⅰ:$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 与组Ⅱ:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 等价,因而有相同的秩.

证明 证法 1

$$\boldsymbol{b}_1+\cdots+\boldsymbol{b}_j+\cdots+\boldsymbol{b}_r=(r-1)(\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_{j-1}+\boldsymbol{a}_{j+1}+\cdots+\boldsymbol{a}_r)+(r-1)\boldsymbol{a}_j. \tag{1}$$

将 b_j 表达式乘 $(r-1)$,得

$$(r-1)\boldsymbol{b}_j=(r-1)(\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_{j-1}+\boldsymbol{a}_{j+1}+\cdots+\boldsymbol{a}_r). \tag{2}$$

(1)式减去(2)式得

$$\boldsymbol{a}_j=\frac{1}{r-1}[\boldsymbol{b}_1+\cdots+(2-r)\boldsymbol{b}_j+\cdots+\boldsymbol{b}_r],j=1,2,\cdots,r,$$

于是组Ⅱ也可由组Ⅰ线性表出,故两者等价,从而秩相等.

证法 2 原来的 r 个等式可合并写成:

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix},$$

由于 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{r-1}(r-1)\neq0$,故

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)\boldsymbol{A}^{-1},$$

亦即两向量组可相互线性表出,故等价,所以有相同的秩.

点评 已知组Ⅰ可由组Ⅱ线性表出,只需再证组Ⅱ可由组Ⅰ线性表出即可.

证法 1 和证法 2 的思路相同,证法 2 较简捷,只不过要在学完矩阵运算后才可用.

例 4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,3,4,3)'$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2,1,3)'$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,0,5,2)'$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,0,5,10,8)'$,$\boldsymbol{\alpha}_5=(-1,0,1,-2,-2)'$,求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组及秩.

解 解法 1 由题意知,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,添加 $\boldsymbol{\alpha}_3$,看向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性关系.

因 $\begin{vmatrix}1&0&3\\3&-1&2\\-1&1&0\end{vmatrix}\neq0$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,应保留 $\boldsymbol{\alpha}_3$.

再添加 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，考察 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 设 $\boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，于是得：

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 - k_3 = 0, \\ -k_2 + k_3 = 0, \\ 3k_1 + 2k_2 = 5, \\ 4k_1 + k_2 + 5k_3 = 10, \\ 3k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 8. \end{cases}$$

解之得，$k_1 = k_2 = k_3$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，应去掉 $\boldsymbol{\alpha}_4$，再添加 $\boldsymbol{\alpha}_5$，看 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 是否能由前面的向量线性表出，利用同样的方法可得 $\boldsymbol{\alpha}_5 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$，所以应去掉 $\boldsymbol{\alpha}_5$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大无关组，且其秩为 3.

解法 2　以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为列作矩阵 $\boldsymbol{A}$，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 10 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_3 \quad \boldsymbol{\beta}_4 \quad \boldsymbol{\beta}_5$$

由于初等行变换不改变列向量之间的线性关系，又易知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组中，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\beta}_4 = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_5 = \boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是原向量组的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 所以原向量组的秩为 3.

点评　解法 1 是使用逐项添加的方法. 先取该向量组的两个线性无关的非零向量. 然后逐一添加，若添加的向量可以由前面的向量线性表出，则去掉，否则就保留下来. 继续往下验证，直到最后一个向量为止. 解法 2 是以所求的向量组为列作矩阵 $\boldsymbol{A}$，然后对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换得到等价矩阵 $\boldsymbol{B}$，则求出 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大线性无关组即可. 一般将 $\boldsymbol{B}$ 化为阶梯形，这时 $\boldsymbol{B}$ 中非零行的首非零元所在的列对应 $\boldsymbol{A}$ 中的列即极大线性无关组，而 $\boldsymbol{A}$ 的秩即 $\boldsymbol{B}$ 中的非零行数.

例 5　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,3)'$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,-3,5,1)'$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (3,2,-1,p+2)'$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = (-2,-6,10,p)'$，

1) p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\boldsymbol{\alpha} = (4,1,6,10)'$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出；

2) p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性

无关组.

解 对矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\vdots\ \boldsymbol{\alpha}]$做初等行变换：

$$\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&\vdots&4\\1&-3&2&-6&\vdots&1\\1&5&-1&10&\vdots&6\\3&1&p+2&p&\vdots&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&\vdots&4\\0&-2&-1&-4&\vdots&-3\\0&6&-4&12&\vdots&2\\0&4&p-7&p+6&\vdots&-2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&\vdots&4\\0&-2&-1&-4&\vdots&-3\\0&0&-7&0&\vdots&-7\\0&0&p-9&p-2&\vdots&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&\vdots&4\\0&-2&-1&-4&\vdots&-3\\0&0&1&0&\vdots&1\\0&0&0&p-2&\vdots&1-p\end{bmatrix}.$$

1）当 $p\neq2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.此时设 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$，解得：$k_1=2,k_2=\dfrac{3p-4}{p-2},k_3=1,k_4=\dfrac{1-p}{p-2}$.

$$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3p-4}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\frac{1-p}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

2）当 $p=2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.此时向量组的秩等于 3. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$(或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$)为其一个极大线性无关组.

点评 4 个 4 维向量是否线性相关，可直接由其构成的行列式是否为零来判断.或考虑到还要求把 $\boldsymbol{\alpha}$ 用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表出，即求 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$的解，两步结合在一起进行，直接通过初等行变换化矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\vdots\ \boldsymbol{\alpha}]$为阶梯形，在 p 确定时，求向量组的秩和极大线性无关组可按常规方法处理.

例 6 已知两个向量组有相同的秩，且其中之一可被另一个线性表出.证明这两个向量组等价.

证明 设
$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s \tag{1}$$
与
$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t \tag{2}$$
为两个秩为 r 的向量组，并且向量组(2)可由向量组(1)线性表出.

若 $r=0$，此时(1)与(2)都只含有零向量，显然它们等价.

若 $r>0$，此时可设，向量组(1)的一个极大线性无关组为
$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}, \tag{3}$$
向量组(2)的一个极大线性无关组为
$$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}. \tag{4}$$
由题设知，(4)可由(1)线性表出，所以，(4)也可由(3)线性表出，由替换定理知，(4)与(3)等价.因两个向量组的等价关系具有自反性、对称性、传递性，故(1)与

(2)也等价.

点评 一个向量组总是与它的任一极大无关组等价,因而,证明两个向量组等价可以转化为证明这两个向量组的极大无关组等价.

例 7 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$是复数域 **C** 上的向量空间 V 中的三个向量,它们线性无关.

证明 向量 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_1$ 也线性无关,如何把这种情况推广到 V 中 m 个向量?

解 1) 设 $k_1(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+k_2(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3)+k_3(\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{0}$,得

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{x}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{x}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$线性无关,

得
$$\begin{cases}k_1+k_3=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0.\end{cases}$$

解得:$k_1=k_2=k_3=0$,故 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_1$线性无关.

2) 推广到 V 中 m 个向量:若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关,问 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3,\cdots,\boldsymbol{x}_m+\boldsymbol{x}_1$是否也线性无关?

由 $k_1(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+k_2(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3)+\cdots+k_m(\boldsymbol{x}_m+\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{0}$,得

$$\begin{cases}k_1+k_m=0,\\k_1+k_2=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\k_{m-1}+k_m=0.\end{cases}\tag{1}$$

(1)的系数行列式:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{m+1}=\begin{cases}2,&\text{当 } m \text{ 为奇数时},\\0,&\text{当 } m \text{ 为偶数时},\end{cases}$$

故当 m 为奇数时,$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3,\cdots,\boldsymbol{x}_m+\boldsymbol{x}_1$也线性无关;当 m 为偶数时,$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3,\cdots,\boldsymbol{x}_m+\boldsymbol{x}_1$线性相关.

点评 判定向量组线性相关性,转化成判断一个齐次线性方程组是否有非零解,若有非零解则线性相关,否则线性无关.

例 8 设向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$和向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$的秩分别为 p 和 q.

证明:1) 若Ⅰ可由Ⅱ线性表出,则 $p\leqslant q$;2) 若Ⅰ与Ⅱ等价,则 $p=q$.

证明 分两种情况：

若 $p=0$,显然有 $p\leqslant q$,并且当Ⅰ与Ⅱ等价时,则有 $q=0$,此时 $p=q$,故结论成立.

若 $p>0$,则向量组Ⅰ含有非零向量.又因为Ⅰ可由Ⅱ线性表出,所以Ⅱ中也含有非零向量,于是有 $q>0$,此时可设Ⅰ的一个极大线性无关组为

$$\text{Ⅲ}:\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p},$$

Ⅱ的一个极大线性无关组为

$$\text{Ⅳ}:\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_q},$$

由题设可知,Ⅰ可由Ⅱ线性表出,于是,Ⅲ也可由Ⅳ线性表出.

又因为向量组Ⅲ线性无关,所以,由替换定理得 $p\leqslant q$.因为当Ⅰ与Ⅱ等价时,Ⅲ与Ⅳ也等价,所以,Ⅳ可由Ⅲ线性表出,再由替换定理知,$q\leqslant p$,从而 $p=q$.

点评 因为一个向量组的秩,就是这个向量组的极大线性无关组中所含向量的个数,证明两个向量组的秩之间具有某种关系,通常归结为这两个向量组的极大线性无关组之间的关系.这样,可使我们对问题的实质看得更清楚.

例 9 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充要条件是表示法是唯一的.

证明 设 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出,设有

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

由此可得：

$$(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_r-l_r)\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,所以 $k_i-l_i=0(i=1,2,\cdots,r)$,即 $k_i=l_i(i=1,2,\cdots,r)$.由此可见,这两种表示法是相同的.

反之,设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 表示方法唯一,如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,则有 $l_1,l_2,\cdots,l_r$ 不全为零,使 $l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$,于是 $\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_r+l_r)\boldsymbol{\alpha}_r$ 与原表示法不同,矛盾,因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

例 10 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{nn}$ 为非零实矩阵.证明:若 $|\mathbf{A}|$ 的每一元素 a_{ij} 都等于它自己的代数余子式,则秩 $\mathbf{A}=n$.

证明 因 $\mathbf{A}$ 不是零矩阵,所以它至少有一个元素不为零,不妨设 $a_{ij}\neq0$.把行列式 $|\mathbf{A}|$ 依第 i 行展开,得

$$|\mathbf{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

因$|A|$的每一个元素都等于它自己的代数余子式，故

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{ij}^2 + \cdots + a_{in}^2.$$

由于$a_{ij}\neq 0$，因而$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故秩$\boldsymbol{A}=n$.

点评　这是一个与行列式$|\boldsymbol{A}|$的元素的代数余子式有关的命题.当一个命题涉及$|\boldsymbol{A}|$的一行(列)或若干行(列)元素的代数余子式时，通常可以考虑用以下等式进行证明：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & (\text{当 } i=j \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } i\neq j \text{ 时}), \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & (\text{当 } i=j \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } i\neq j \text{ 时}), \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|^n.$$

根据以上的分析，再联系到矩阵的秩的性质，就不难得到证明.

例 11　求下面齐次线性方程组的一个基础解系：

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

解　对系数矩阵$\boldsymbol{A}$施行初等行变换化为行简化阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故原方程组的同解方程组为：

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{8}{3}x_5, \\ x_3 = x_4 + 3x_5, \end{cases}$$

其中 x_2,x_4,x_5 为自由未知量.取 $x_2=-3,x_4=x_5=0$,得 $x_1=2,x_3=0$.取 $x_4=-3,x_2=x_5=0$,得 $x_1=4,x_3=-3$;取 $x_5=-3,x_2=x_4=0$,得 $x_1=8,x_3=-9$.令 $\eta_1=(2,-3,0,0,0)'$, $\eta_2=(4,0,-3,-3,0)'$, $\eta_3=(8,0,-9,0,-3)'$,则 η_1,η_2,η_3 为所求基础解系.

点评 为求齐次线性方程组的基础解系,先用初等行变换化系数矩阵为阶梯形矩阵,求出其秩 r,写出同解方程组,然后对 $n-r$ 个自由未知量分别取 1,其余取 0,即可求出基础解系.

例 12 设有齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0. \end{cases} \tag{1}$$

$M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为系数矩阵 $\mathbf{A}$ 中划去第 i 列剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式.证明:如果秩 $\mathbf{A}=n-1$,则 $\boldsymbol{\eta}_0=(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组(1)的一个基础解系.

证明 1) 构造一个行列式:

$$D(i)=\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}, i=1,2,\cdots,n-1.$$

因为 $D(i)$ 有两行相同,故 $D(i)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$.

将 $D(i)$ 按第一行展开得:

$$D(i)=a_{i1}M_1-a_{i2}M_2+\cdots+(-1)^{n+1}a_{in}M_n=a_{i1}M_1-a_{i2}M_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_{in}M_n=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n-1).$$

由此知,$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组(1)的一个解.

2) 欲证 $\boldsymbol{\eta}_0$ 线性无关,只需证 $\boldsymbol{\eta}_0\neq\mathbf{0}$,因为秩 $\mathbf{A}=n-1$,故 $\mathbf{A}$ 至少有一个 $n-1$ 级子式不为零,由此知,$M_1,M_2,\cdots,M_n$ 至少有一个不为零,故 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 不是零向量.

由 1),2) 知 $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组(1)的一个基础解系.

点评 已知秩 $\mathbf{A}=n-1$,所以(1)的基础解系只含一个解向量,欲证 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是方程组(1)的一个基础解系,只需证:1) $\boldsymbol{\eta}_0$ 是方程组(1)的一个解向量;2) $\boldsymbol{\eta}_0$ 线性无关.

先假定 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是方程组(1)的一个解向量,则把 $\boldsymbol{\eta}_0$ 代入(1)的第 i 个方程,应有

$$a_{i1}M_1 - a_{i2}M_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{in}M_n = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n-1).$$

上式从形式上看，很像一个行列式按 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 为元素的行展开的结果.由此启发我们，可构造一个满足上式要求的行列式，作为证 1)的工具.

例 13 已知下列线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1. \end{cases} \tag{2}$$

1) 求解方程组(1)，用其导出组的基础解系表示一般解；

2) 当方程组(2)中参数 m, n, t 为何值时方程组(1)与(2)同解.

解 1)设方程组(1)的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}_1$，增广矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$，对 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$施行初等行变换：

$$\overline{\boldsymbol{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

因秩 $\boldsymbol{A}_1$ = 秩 $\overline{\boldsymbol{A}}_1 = 3 < 4$，故方程组有无穷多解，且一般解为：

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

2) 将 $\boldsymbol{r}$ 代入方程组(2)的第一个方程得：$(-2+k) + m(-4+k) - (-5+2k) - k = -5$，解得 $m=2$.

将 $\boldsymbol{r}$ 代入方程组(2)的第二个和第三个方程分别得：$n=4, t=6$，

即当 $m=2, n=4, t=6$ 时，方程组(1)的全部解都是方程组(2)的解.此时，方程组(2)化为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$

可求得(2)的一般解也为：

$$r=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

显然,方程组(1),(2)的解完全相同,即方程组(1)与(2)同解.

点评 利用矩阵的初等行变换判定出线性方程组(1)的解的情况,并写出其一般解,将其一般解分别代入方程组(2)中,分别求出 m,n,t,最后要特别验证方程组(2)的一般解与方程组(1)的完全相同.

例 14 用导出组的基础解系表示线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\\ x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}=2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}=n+1\end{cases}$$

的一般解.

解 由题设方程组的导出组为:

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}=0.\end{cases}\tag{1}$$

将(1)中的第 n 个方程乘以 -1 加到第 $n+1$ 个方程上,然后将第 $n-1$ 个方程乘以 -1 加到第 n 个方程上,这样依次做下去可得方程组:

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ -x_1+x_{n+1}=0,\\ -x_2+x_{n+2}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ -x_n+x_{2n}=0.\end{cases}\tag{2}$$

(1)与(2)是同解方程组,由(2)可得:

$$\begin{cases}x_1=-x_{n+2}-\cdots-x_{2n},\\ x_2=x_{n+2},\\ x_3=x_{n+3},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=x_{2n},\\ x_{n+1}=-x_{n+2}-\cdots-x_{2n}.\end{cases}$$

于是可得(2)的基础解系:

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0,0,-1,1,0,\cdots,0,0),$$
$$\eta_2=(-1,0,1,\cdots,0,0,-1,0,1,\cdots,0,0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_{n-2}=(-1,0,0,\cdots,1,0,-1,0,0,\cdots,1,0),$$
$$\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,0,1,-1,0,0,\cdots,0,1).$$

又易知，$\gamma_0=(0,0,\cdots,0,1,1,\cdots,1,2)$为原方程组的一个特解，故原方程组的一般解为：

$$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}.$$

点评 欲求非齐次线性方程组的一般解，需求其一个特解与其导出方程组(1)的基础解系.在本题中，原方程组的一个特解是容易求得的，关键是求(1)的基础解系，我们是通过对(1)进行方程组的初等变换得到一个与(1)同解的方程组(2)，而(2)的基础解系是容易求得的.

例 15 设线性方程组(1)、(2)的导出组分别为(3)、(4)，若(1)有解，且(1)与(2)同解，则(3)与(4)也同解.

证明 设方程组(1)、(2)都含有 n 个未知量，它们的系数矩阵分别为 A_1，A_2，由题设知，(1)、(2)都有解，下面分两种情况证明.

若秩$(A_1)=n$，由一般线性方程组解的个数判定定理知，(1)有唯一解.由题设知，(2)也有唯一解，故秩$(A_2)=n$.由于 A_1，A_2分别为(3)，(4)的系数矩阵，根据齐次线性方程组解的个数判定定理知，(3)，(4)都只有零解，因此(3)与(4)同解.

若秩$(A_1)=r<n$，则(1)有无穷多解，(2)也有无穷多解，因此秩$(A_2)<n$，由此可知，(3)与(4)都有无穷多解，(3)与(4)都有基础解系.设(3)的一个基础解系为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$，$\eta_0$为(1)的一个特解，则(1)的任一解可表为

$$\eta=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}.$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意数，由题设知，η 也是(2)的解.又因 η_0为(2)的一个特解，故 $\eta-\eta_0$为(4)的解，即

$$\eta-\eta_0=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}.$$

为(4)的解，由此知，(3)的任一解 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$.都是(4)的解.

同理可证，(4)的任一解也都是(3)的解，故(3)与(4)同解.

点评 设(1)、(2)的解集合为 M，取 $\gamma_0\in M$，则(3)的解集合为 $N=\{\alpha-\gamma_0\mid\alpha\in M\}$，同理(4)的解集合也是 N，故(3)与(4)同解.

例 16 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$为 n 个两两不同的实数，

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{i-1}&a_2^{i-1}&\cdots&a_n^{i-1}\end{pmatrix}$$

. 这里 $i<n$. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 为线性方程组 $\boldsymbol{VX}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解. 试证: $\boldsymbol{\alpha}$ 至少有 $i+1$ 个非零分量.

证明 由题设知

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_1^{i-1}x_1+a_2^{i-1}x_2+\cdots+a_n^{i-1}x_n=0.\end{cases}$$

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 的非零分量的个数 $\leqslant i$, 不妨设 $(x_1,x_2,\cdots,x_i)\neq\boldsymbol{0}$, $x_{i+1}=x_{i+2}=\cdots=x_n=0$, 则

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_i=0,\\a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_ix_i=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_1^{i-1}x_1+a_2^{i-1}x_2+\cdots+a_i^{i-1}x_i=0.\end{cases}\tag{1}$$

于是方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_i=0,\\a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_ix_i=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_1^{i-1}x_1+a_2^{i-1}x_2+\cdots+a_i^{i-1}x_i=0\end{cases}$$

有非零解, 因此, 它的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_i\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{i-1}&a_2^{i-1}&\cdots&a_i^{i-1}\end{vmatrix}=(a_2-a_1)\cdots(a_i-a_1)(a_3-a_2)\cdots$$

$$(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})=0,$$

与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同矛盾, 故 $\boldsymbol{\alpha}$ 的非零分量的个数 $\geqslant i+1$.

点评 用反证法. 由 $\boldsymbol{x}$ 的非零分量的个数 $\leqslant i$ 的假设, 得到一个含 i 个方程 i 个未知量的齐次线性方程组(1), 而(1)有非零解, 故(1)的系数行列式等于零, 但(1)的系数行列式为 i 级范德蒙行列式, 其为零的充要条件是 $a_1,a_2,\cdots,a_i$ 中至少有两个相等, 从而推出矛盾.

例 17 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, $\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1$

$+ t_2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = t_1\boldsymbol{\alpha}_2 + t_2\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s = t_1\boldsymbol{\alpha}_s + t_2\boldsymbol{\alpha}_1$，其中 t_1, t_2 为实常数，试问 t_1, t_2 满足何关系时，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也为线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

解 因为 $\boldsymbol{\beta}_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合，所以 $\boldsymbol{\beta}_i$ 均为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的解. 设

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

即 $$(t_1k_1 + t_2k_s)\boldsymbol{\alpha}_1 + (t_2k_1 + t_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (t_2k_{s-1} + t_1k_s)\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，所以有

$$\begin{cases} t_1k_1 + t_2k_s = 0, \\ t_2k_1 + t_1k_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_2k_{s-1} + t_1k_s = 0. \end{cases} \tag{2}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix}_{s\times s} = t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s,$$

所以当 $t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s \neq 0$，即当 s 为偶数，$t_1 \neq \pm t_2$ 时或当 s 为奇数，$t_1 \neq -t_2$ 时，方程组(2)只有零解：$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$，从而 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关. 此时 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也为线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

点评 由于齐次线性方程组解的线性组合仍为该方程组的解，故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也为线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的解. 因此，当且仅当 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关时，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 是基础解系. 而证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关的一般方法是设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{0}$，推出 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$，从而转化为判断一个齐次线性方程组只有零解的问题.

例 18 设 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 为方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的 t 个解向量. 问 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 怎样的线性组合仍为(1)的解向量？

证明 假设 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 的线性组合 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\eta}_t$ 是解向量. 设 $\boldsymbol{\eta}_i = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in}), i = 1, 2, \cdots, t$,

于是有 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\eta}_t=\left(\sum_{i=1}^{t}k_ic_{i1},\sum_{i=1}^{t}k_ic_{i2},\cdots,\sum_{i=1}^{t}k_ic_{in}\right)$,将上式代入(1)的第 i 个方程($i=1,2,\cdots,m$),

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{i=1}^{t}k_ic_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{t}a_{ij}k_ic_{ij}=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_ic_{ij}=\sum_{i=1}^{t}k_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{ij}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{t}k_ib_i=\left(\sum_{i=1}^{t}k_i\right)b_i=b_i.$$

由此得 $\sum_{i=1}^{t}k_i=1$.

反之,当 $\sum_{i=1}^{t}k_i=1$ 时,显然 $\sum_{i=1}^{t}k_i\boldsymbol{\eta}_i$ 为解向量.

点评 本题的特点是命题的条件没有全部给出,我们可"执果索因",求出 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 的线性组合为解的必要条件,然后证明条件也是充分的.

例 19 设秩 $\boldsymbol{A}=$ 秩 $\overline{\boldsymbol{A}}=r$,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量集合的秩是 $n-r+1$,其中 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

证明 设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解为 $\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$,则 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 均为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解.下面证明它是线性无关的.

若有 $k\boldsymbol{\beta}+\sum_{i=1}^{n-r}k_i(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{0}$,则有 $\left(k+\sum_{i=1}^{n-r}k_i\right)\boldsymbol{\beta}+\sum_{i=1}^{n-r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}$,故 $k+\sum_{i=1}^{n-r}k_i=0$.否则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性表示,因而是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,这是不可能的,进而得 $\sum_{i=1}^{n-r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}$,$k_i=0$,$i=1,2,\cdots,n-r$,从而 $k=0$.

再设 $\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解,则 $\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,因此可由基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性表示.设

$$\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\beta}_{n-r},$$
$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}+\sum_{i=1}^{n-r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\left(1-\sum_{i=1}^{n-r}k_i\right)\boldsymbol{\beta}+\sum_{i=1}^{n-r}k_i(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_i),$$

故 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解集合的极大线性无关组.

点评 为证明 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量所组成向量组的极大无关组含 $n-r+1$ 个解向量,找出 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的 $n-r+1$ 个解向量,证明这 $n-r+1$ 个解向量线性无关,以及 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任意解向量都可由这 $n-r+1$ 个解向量线性表出.

例 20 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$为一实数域上的矩阵，证明：

1）如果$|a_{ii}|>\sum\limits_{i\neq j}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$，则$|\mathbf{A}|\neq 0$；

2）如果$a_{ii}>\sum\limits_{i\neq j}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$，则$|\mathbf{A}|>0$.

证明 1）对任意的非零向量$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，设$k=\max(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_n|)$，显然$k>0$，不妨设$k=|b_i|$（$i$是$1,2,\cdots,n$中某一个），由条件1)得

$$|a_{ii}b_i|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}||b_j|=\sum_{j\neq i}|a_{ij}b_j|\geqslant\left|\sum_{j\neq i}a_{ij}b_j\right|,$$

因此$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_j=a_{ii}b_i+\sum\limits_{j\neq i}a_{ij}b_j\neq 0$，$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\mathbf{0}$只有唯一零解，故$|\mathbf{A}|\neq 0$.

2）设$0\leqslant t\leqslant 1$，令

$$f(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21}t & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31}t & a_{32}t & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & a_{n3}t & \cdots & a_{n,n-1}t & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用本题1)得$f(t)\neq 0$. 显然$f(1)=|\mathbf{A}|$，$f(0)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}>0$，若$f(1)<0$，而$f(t)$是$t$的连续函数，则必定存在点$t_1\in(0,1)$，使$f(t_1)=0$，这与上述结论矛盾，所以$f(1)=|\mathbf{A}|>0$.

点评 为证$|\mathbf{A}|\neq 0$，等价于证明齐次线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$只有唯一的零解，即为1)的证明思路. 2)比1)更深入，要进一步证明$|\mathbf{A}|>0$. 为此，构造了关于t的行列式，借助连续函数的性质得证.

例 21 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0, \end{cases} \tag{1}$$

的一个基础解系为$(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})$，$(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})$，$\cdots$，$(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})$，试写出线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1,2n}y_{2n} = 0, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2,2n}y_{2n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,2n}y_{2n} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

的一般解,并说明理由.

解 解法1 将 $\boldsymbol{\beta}_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1,2n})'$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2,2n})'$, $\cdots$, $\beta_n = (b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{n,2n})'$代入方程组(1)的第一个方程,得

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \cdots + a_{1,2n}b_{1,2n} = 0, \\ a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1,2n}b_{2,2n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{11}b_{n1} + a_{12}b_{n2} + \cdots + a_{1,2n}b_{1,2n} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12} + \cdots + b_{1,2n}a_{1,2n} = 0, \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{12} + \cdots + b_{2,2n}a_{1,2n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{12} + \cdots + b_{n,2n}a_{1,2n} = 0, \end{cases}$$

故知 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1,2n})'$是(2)的解.

同理代入第2,3,$\cdots$,n 个方程,得 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2,2n})'$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n,2n})'$,均为(2)的解.又 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 为(1)的一个基础解系,(1)的系数矩阵的秩必为 n,从而(1)的系数矩阵的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,而(2)的系数矩阵的秩为 n,未知量的个数为 $2n$,其 n 个线性无关的解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 必为其基础解系,故一般解为:$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$,其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是任意常数.

解法2 记方程组(1)、(2)的系数矩阵分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$,则由题设有 $\boldsymbol{AB}' = \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{AB}')' = 0$,即 $\boldsymbol{BA}' = \boldsymbol{0}$,可见 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量的转置向量为(2)的 n 个解向量.

因为秩 $\boldsymbol{B} = n$,秩 $\mathbf{A} = 2n - n = n$.故 $\mathbf{A}$ 的 n 个行向量线性无关,又由(2),秩 $\boldsymbol{B} = n$,未知量的个数为 $2n$,故 $\mathbf{A}$ 的 n 个行向量组是(2)的一个基础解系,相应一般解为:$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n$,其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$是任意常数.

点评 按题目要求,应先写出(2)的一般解.齐次线性方程组一般解应表为一个基础解系的线性组合,因而求一般解的关键在于求出一个基础解系.

例22 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个互不相等的数,证明方程组

$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1 + a_1^{n-2}x_2 + \cdots + a_1x_{n-1} + x_n = -a_1^n, \\ a_2^{n-1}x_1 + a_2^{n-2}x_2 + \cdots + a_2x_{n-1} + x_n = -a_2^n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^{n-1}x_1 + a_n^{n-2}x_2 + \cdots + a_nx_{n-1} + x_n = -a_n^n \end{cases}$$

有唯一解，并求解.

证明 方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j).$$

因 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相等，故 $D\neq 0$，所以方程组有唯一解. 令 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为其解，考虑多项式

$$f(y)=y^n+x_1y^{n-1}+x_2y^{n-2}+\cdots+x_{n-1}y+x_n.$$

因 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为所给方程组的解，故 $f(a_i)=0$. 这就是说，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $f(y)$ 的根，由于 $f(y)$ 为 n 次方程，故最多有 n 个不同的根，即 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是其全部根. 由根与系数的关系可得方程组的解为：

$$x_1=-(a_1+a_2+\cdots+a_n),$$

$$x_2=a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_n+\cdots+a_{n-1}a_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=(-1)^na_1a_2\cdots a_n.$$

点评 证明一个含 n 个未知量 n 个方程的线性方程组有唯一解，通常是用克拉默法则，只需证明其系数行列式不为零. 为了求其解，先设方程组的解为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，然后以其为系数构造一个 n 次多项式，借助多项式根与系数的关系，从而求得原方程组的解.

例 23 λ 为何值时，下列多项式有公根，

$$f(x)=x^3-\lambda x+4,\quad g(x)=2x^2+(1-\lambda)x+2.$$

解 由

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2(\lambda^3-8\lambda^2-3\lambda+90)=0.$$

解得 $\lambda=-3,\lambda=5,\lambda=6$，故 $\lambda=-3$ 或 $\lambda=5$ 或 $\lambda=6$ 时，两多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公根.

点评 由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式 $R(f,g)=0$，求解 λ，即为所求.

例 24 解下列联立方程

$$\begin{cases} y^2+2xy+3x^2+2x-2y+2=0, & (1)\\ y^2+4xy+x^2+y-5x-4=0. & (2)\end{cases}$$

解 原式化为

$$\begin{cases} y^2+(2x-2)y+3x^2+2x+2=0,\\ y^2+(4x+1)y+x^2-5x-4=0.\end{cases}$$

$$R_y(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & 2x-2 & 3x^2+2x+2 & 0\\ 0 & 1 & 2x-2 & 3x^2+2x+2\\ 1 & 4x+1 & x^2-5x-4 & 0\\ 0 & 1 & 4x+1 & x^2-5x-4\end{vmatrix}$$

$$=2(2x+3)^2(x+1)(3x+1)=0.$$

把 $x=-\dfrac{3}{2}, x=-1, x=-\dfrac{1}{3}$ 分别代入原式得：

(a) $\begin{cases}4y^2-20y+23=0,\\ 4y^2-20y+23=0,\end{cases}$ (b) $\begin{cases}y^2-3y+2=0,\\ y^2-4y+3=0,\end{cases}$ (c) $\begin{cases}9y^2-3y-20=0,\\ 3y^2-8y+5=0.\end{cases}$

从(a)解得 $y=\dfrac{5\pm\sqrt{2}}{2}$，从(b)解得 $y=1$，从(c)解得 $y=\dfrac{5}{3}$，故 $\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5+\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5-\sqrt{2}}{2}\right),(-1,1),\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right)$为原联立方程的解.

§3.3 习　题

1. 用消元法解下列方程组：

1) $\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1,\\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3,\\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3,\\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_4+2x_5=1,\\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2,\\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7,\\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25;\end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2+x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1, \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2. \end{cases}$

2. 把向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表成向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合：

$\boldsymbol{\beta}=(0,0,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,-1)$.

3. 证明：如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出.

4. 设 $t_1,t_2,\cdots,t_r$ 是互不相同的数，$r\leqslant n$，证明：$\boldsymbol{\alpha}_i=(1,t_i,\cdots,t_i^{n-1})$，$i=1,2,\cdots,r$ 是线性无关的.

5. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的极大线性无关组.

6. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的 r 个向量，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量都可被它们线性表出，证明：$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组.

7. 用消元法求下列向量组的极大线性无关组与秩.

1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,-1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3,-4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-9,-16,22)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(7,1,0,-1,3)$；

2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量,已知单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可被它们线性表出,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是任意 n 维向量都可被它们线性表出.

10. 证明:方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

对任何 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都有解的充分必要条件是系数行列式 $|a_{ij}|\neq 0$.

11. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 有相同的秩,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 等价.

12. 计算下列矩阵的秩:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;　　2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$;　　4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. 讨论 λ,a,b 取何值时下列方程组有解,并求解:

1) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda,\\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=2\lambda,\\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4,\\ x_1+bx_2+x_3=3,\\ x_1+2bx_2+x_3=4.\end{cases}$

14．求下列齐次线性方程组的一个基础解系：

1) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0,\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0,\\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0,\\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0,\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0,\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0,\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0.\end{cases}$

15．a,b 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b\end{cases}$$

有解？在有解的情形，求一般解．

16．设 $\begin{cases}x_1-x_2=a_1,\\ x_2-x_3=a_2,\\ x_3-x_4=a_3,\\ x_4-x_5=a_4,\\ x_5-x_1=a_5.\end{cases}$ 证明：这个方程组有解的充分必要条件为 $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=0$．在有解的情形，求一般解．

17．证明与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系．

18．设齐次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$ 的秩为 r，证明：方程组的任意 $n-r$ 个线性无关的解都是它的一个基础解系．

19．多项式 $2x^3-3x^2+\lambda x+2$ 与 $x^4+\lambda x^2-3x-1$ 在 λ 取何值时，有公共根？

20．$R(f,g)$与 $R(g,f)$的关系是怎样的？

21．解下列联立方程：

1) $\begin{cases}5y^2-6xy+5x^2-16=0,\\ y^2-xy+2x^2-y-x-4=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+y^2+4x-2y+3=0,\\ x^2+4xy-y^2+10y-9=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}y^2+(x-4)y+x^2-2x+3=0,\\ y^3-5y^2+(x+7)y+x^3-x^2-5x-3=0.\end{cases}$

22. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性无关的向量，$\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j,i=1,2,\cdots,r$. 证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1r}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{r1}&a_{r2}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\neq0.$$

23. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$(其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$)线性相关的充分必要条件是至少有一 $\boldsymbol{\alpha}_i(1<i\leqslant s)$可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$线性表出.

24. 证明：一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一个极大线性无关组.

25. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$.

1) 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关；

2) 把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充成一个极大线性无关组.

26. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，在其中任取 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$，证明：此向量组的秩$\geqslant r+m-s$.

27. 设向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$，$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$的秩分别为 r_1,r_2,r_3. 证明：$\max(r_1,r_2)\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2$.

28. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,s,\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 证明：如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，那么 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

29. 设 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是线性方程组的一个解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是它的导出方程组的一个基础解系，令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_0,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{t+1}=\boldsymbol{\eta}_t+\boldsymbol{\eta}_0.$$

证明:线性方程组的任一个解 γ,都可表成 $\gamma=u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+\cdots+u_{t+1}\gamma_{t+1}$,其中

$$u_1+u_2+\cdots+u_{t+1}=1.$$

30. 求出通过点 $M_1(1,0,0),M_2(1,1,0),M_3(1,1,1),M_4(0,1,1)$的球面方程.

31. 求出通过点 $M_1(0,0),M_2(1,0),M_3(2,1),M_4(1,1),M_5(1,4)$的二次曲线的方程.

32. 求下列曲线的直角坐标方程:

1) $x=t^2-t+1,y=2t^2+t-3$; 2) $x=\dfrac{2t+1}{t^2+1},y=\dfrac{t^2+2t-1}{t^2+1}$.

33. 求结式:1) $\dfrac{x^5-1}{x-1}$与$\dfrac{x^7-1}{x-1}$; 2) x^n+x+1 与 x^2-3x+2; 3) x^n+1 与$(x-1)^n$.

34. 向量组1) $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 线性无关,且可用向量组2) $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 线性表出,求证:一定存在一个正整数 $k(1\leqslant k\leqslant l)$,使 $a_k,b_2,\cdots,b_m$ 线性无关.

35. 设整系数方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\qquad(i=1,2,\cdots,n)\qquad(*)$$

对任意 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均有整数解,证明其系数行列式必为 ±1.

36. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是以下方程组的解

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$$

1) 求 λ 的值;

2) 证明$|\boldsymbol{B}|=0$.

37. 设

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}',B=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}'$是$\boldsymbol{\beta}$ 的转置,求解方程

$$2B^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+B^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}.$$

38. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$,是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,$\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解,证明 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

39. 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个解,且 $r(\boldsymbol{A})=3$,$\boldsymbol{\beta}_1=(2,0,5,-1)'$,$\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3=(1,9,8,6)'$,求其通解(用向量的形式表示).

40. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级反对称(实)阵,$\boldsymbol{D}$ 为 n 级实对角阵,且其主对角线上元素全大于零,求证 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|>0$.

§3.4 习题答案与提示

1. 1) $x_1=-\frac{1}{2}x_5,x_2=-1-\frac{1}{2}x_5,x_3=0,x_4=-1-\frac{1}{2}x_5,x_5$ 任意.

2) 无解. 3) $x_1=-8,x_2=3,x_3=6,x_4=0$; 4) $x_1=\frac{3}{17}x_3-\frac{13}{17}x_4,x_2=\frac{19}{17}x_3-\frac{20}{17}x_4,x_3,x_4$ 任意. 5) 无解. 6) $x_1=\frac{1+5x_4}{6},x_2=\frac{1-7x_4}{6},x_3=\frac{1+5x_4}{6},x_4$ 任意.

2. $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$.

7. 1) 秩为 3. 2) 秩为 3.

8. 提示:可由本章的例 10 导出.

9. 提示:必要性可由本章的习题 3 导出,充分性可由本章习题 8 推出.

10. 提示:必要性可由本章习题 9 导出.

11. 提示:注意利用本章习题 3.

12. 1) 4. 2) 3. 3) 2. 4) 3. 5) 5.

13. 1) 当 $\lambda\neq1,-2$ 时有唯一解 $x_1=-\frac{1+\lambda}{2+\lambda},x_2=\frac{1}{2+\lambda},x_3=\frac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}$;

当 $\lambda=1$ 时,有无穷多解,$x_1=1-x_2-x_3,x_2,x_3$ 任取;

当 $\lambda=-2$ 时无解.

2) 当 $\lambda\neq0,1$ 时有唯一解,$x_1=\frac{\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9}{\lambda^2(\lambda-1)},x_2=\frac{\lambda^3+12\lambda-9}{\lambda^2(\lambda-1)}$,

$x_3=\frac{-4\lambda^3+3\lambda^2+12\lambda-9}{\lambda^2(\lambda-1)}$;当 $\lambda=0,1$ 时无解.

3) 当 $a\neq1,b\neq0$ 时有唯一解 $x_1=\frac{1-2b}{b(1-a)},x_2=\frac{1}{b},x_3=\frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}$;

当 $a=1,b=\frac{1}{2}$ 时有无穷多解 $x_1=2-x_3,x_2=2,x_3$ 任取;

当 $a=1,b\neq\frac{1}{2}$ 时无解;当 $b=0$ 时无解.

14. 1) $\boldsymbol{\eta}_1=(1,-2,1,0,0),\boldsymbol{\eta}_2=(1,-2,0,1,0),\boldsymbol{\eta}_3=(5,-6,0,0,1)$.

2) $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,1,0,0)$, $\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{6}(7,5,0,2,6)$.

3) $\boldsymbol{\eta}=\left(2,4,\frac{8}{3},\frac{13}{3},1\right)$;　4) $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,-1,1,2,0)$, $\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{4}(1,0,0,5,4)$.

15. 当 $a=0,b=2$ 时有解,一般解为:
$(-2,3,0,0,0)+k_1(1,-2,1,0,0)+k_2(1,-2,0,1,0)+k_3(5,-6,0,0,1)$,其中 $k_i(i=1,2,3)$任取.

16. 提示:根据线性方程组有解的判定定理,一般解为:

$(0,-a_1,-\sum_{i=1}^{2}a_i,-\sum_{i=1}^{3}a_i,-\sum_{i=1}^{4}a_i)+k(1,1,1,1,1)$, k 任取.

19. $\lambda=-3$.

20. $R(f,g)=(-1)^{mn}R(g,f)$,其中 $m=\partial(f(x)),n=\partial(g(x))$.

21. 1) $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=-1.\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=-1.\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-1,\\y_3=1.\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=2,\\y_4=2.\end{cases}$

2) $\begin{cases}x=-3,\\y=0.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{10+3\sqrt{5}}{5},\\y=\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{10-3\sqrt{5}}{5},\\y=\dfrac{5+\sqrt{5}}{5}.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=0,\\y=1.\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=1+\sqrt{2}\mathrm{i}\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=1-\sqrt{2}\mathrm{i}.\end{cases}$

22. 提示:化成齐次线性方程组有无非零解的问题.

28. 提示:设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $i=1,2,\cdots,s$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

首先说明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 同秩,然后应用本章例 8 或习题 11.

30. $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$.

31. $x^2-2xy-x+2y=0$.

32. 提示:应用结式:答案:1) $4x^2+y^2-4xy-23x+7y+19=0$.

2) $8x^2+5y^2-4xy-8x+2y-7=0$.

33. 1) 1.　2) $3\cdot2^n+9$.　3) $(-1)^n\cdot2^n$.

34. 提示:用反证法和替换定理证明.

35. 提示:令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$　$i,j=1,2,\cdots,n$. 取方程组(1)的右端依次为单位矩阵 E 的各列,所得解依次为 A^{-1}的各列.

36. 提示:(1) 利用齐次线性方程组有非零解的充要条件为方程组的系数矩阵的行列式$|\boldsymbol{A}|$为零,从而求得 $\lambda=1$.

(2) 秩 $\boldsymbol{B}$ 的最大值为 $n-$秩 $\boldsymbol{A}$.

37. 提示:利用矩阵的运算性质,把已知方程转化为一个非齐次线性方程组 $8(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$.

38. 提示:易知 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性表出,从而 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.再由向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 等价得出结论.

39. 答案:通解为:$\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\mu}$,其中 $\boldsymbol{\mu}=(3,-9,2,8)'$,$k$ 为任意数.

40. 提示:用反证法证 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|\neq 0$,且 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|$ 不小于零,从而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}|>0$.

第四章　矩　　阵

§4.1　基 本 知 识

一、矩阵的概念：

由数域 P 中 $s\times n$ 个数排成的 s 行 n 列的表称为数域 P 上的一个矩阵，记为 $\boldsymbol{A}_{s\times n}$，或 $\boldsymbol{A}_{sn}$，简记为 $\boldsymbol{A}$ 也记为(a_{ij}). 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

其中数 a_{ij} 称为矩阵 A 的元素.

当 $s=n$ 时，即 $n\times n$ 的矩阵称为 n 阶方阵，也称 n 阶矩阵.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行、列数相同，且对应元素相等，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{0}$. 将 $\boldsymbol{A}$ 的元素均反号得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法：

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $(a_{ij}+b_{ij})_{s\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

2. 数与矩阵的乘法：

设 $k\in P$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$，则 $(ka_{ij})_{s\times n}$ 称 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积，记作 $k\boldsymbol{A}$.

3. 矩阵的乘法：

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{ns}$，则矩阵 $(c_{ij})_{ms}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s)$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作 $\boldsymbol{AB}$.

4. 矩阵的转置：

把一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行变为第 i 列，
得到的矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

三、矩阵的运算性质：

1. 令 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是 $m\times n$ 的矩阵,则

1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$,其中 $\boldsymbol{0}$ 为 $m\times n$ 的零矩阵;

4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,称 $-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵;

5) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

2. 对于矩阵的乘法运算,有

1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$;

2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

3) $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{D}=\boldsymbol{BD}+\boldsymbol{CD}$;

4) 一般 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$;由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$;

5) 对于非零方阵 $\boldsymbol{A}$ 有：$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$ （$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵),$\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{A}^{s+t}$;$(\boldsymbol{A}^s)^t=\boldsymbol{A}^{st}(s,t\geqslant 0)$.

3. 对于转置矩阵有：

1) $(\boldsymbol{A}')'=\boldsymbol{A}$;

2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$;

3) $(a\boldsymbol{A}')=a\boldsymbol{A}'$;

4) $(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$;

5) $(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})'=a\boldsymbol{A}'+b\boldsymbol{B}'$.

四、可逆矩阵与初等矩阵

1. 可逆矩阵：

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,若有 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

2. 非退化矩阵：

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为非退化的;否则称为退化的.非退化矩阵即可逆矩阵.

3. 初等矩阵：

由单位矩阵经过一次行或列的初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.共有三种初等矩阵：

1) 交换单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(列)与第 j 行(列),得 $\boldsymbol{P}(i,j)$,称为换法矩

阵；

2）用非零数 c 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(列)，得 $\boldsymbol{P}(i(c))$，称为倍法矩阵；

3）把 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行(i 列)的 k 倍加到第 i 行(j 列)得 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$，称为消法矩阵.

五、有关可逆矩阵的性质

1．若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则其逆唯一，一般用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的逆．于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

2．方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，也当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $=\boldsymbol{A}$ 的阶.

3．设 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|},$$

这里

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式($i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n$).

4．对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，相当于以相应的初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$；对 $\boldsymbol{A}$ 作初等列变换，相当于以相应的初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$.

5．令 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 的矩阵，秩$(\boldsymbol{A})=r$，则有

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_s,\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 都是初等矩阵.

注：对于性质 5，由于初等矩阵的乘积可逆，则从实用的角度出发，该性质可以叙述为：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

6．求逆矩阵的初等变换法

1）初等行变换法

因为当 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}$ 可由初等行变换化成单位矩阵，即

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$

于是 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}$，这里 $\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 都是初等矩阵，可见

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1,$$

即有

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}).$$

2) 初等列变换法：

仿 1)的分析可得到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1&\cdots&\boldsymbol{Q}_t\\\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}_1&\cdots&\boldsymbol{Q}_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}.$$

六、矩阵的分块

利用矩阵的分块处理阶数较高的矩阵，是一种常用的方法，特别在证明有关的问题时，能有诸多的方便.

1. 分块的概念

令 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 的矩阵，把 $\boldsymbol{A}$ 分成如下形式

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$为 $m_i\times n_j$ 矩阵，且 $m_1+\cdots+m_s=m,n_1+\cdots+n_t=n$.称(1)右边的矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的一个分块.

2. 分块矩阵的运算

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1t}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{B}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix},$$

这里 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行列数相同，且分法一致，那么

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}+\boldsymbol{B}_{1t}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}+\boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix},$$

$$aA = \begin{pmatrix} a\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & a\boldsymbol{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ a\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & a\boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵乘法运算复杂一些,但只要做到 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法一致.即设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st} \end{pmatrix},$$

那么

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rt} \end{pmatrix}.$$

注意:只有在通常的乘法运算 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘的前提下,分块乘法方可进行.

3. 准对角形矩阵的运算

形式如下的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $n_i \times n_i (i=1,2,\cdots,s)$矩阵,称为准对角形矩阵.当各 $n_i=1$ 时,则为对角矩阵.

设有两个相同分块的准对角形矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{B}_s \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_s + \boldsymbol{B}_s \end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_sB_s \end{pmatrix}.$$

当 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都可逆时,则 A 也可逆,且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

七、几个典型结论

1. 方阵乘积的行列式

设 A, B 都是 n 阶方阵,则

$$|AB|=|A||B|;$$

设 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是 n 阶方阵,则

$$|A_1A_2\cdots A_s|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

2. 矩阵乘积的秩和因子的秩之间的关系

令 A 为 $m\times n$ 的矩阵,B 为 $n\times s$ 的矩阵,则

$$\text{秩}(AB)\leqslant\min(\text{秩}\,A, \text{秩}\,B);$$

令 $A=A_1A_2\cdots A_s$,那么

$$\text{秩}\,A\leqslant\min(\text{秩}\,A_1, \cdots, \text{秩}\,A_s).$$

八、几种特殊矩阵

1. 对称矩阵

令 A 为数域上 P 的 n 阶方阵,若有 $A'=A$,则称 A 为对称矩阵.

注:若 A 的元素为 a_{ij},则条件 $A'=A$ 等价于 $a_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$ 即元素以主对角线对称的相等.

2. 反对称矩阵

令 A 为数域 P 上的 n 阶方阵,若有 $A'=-A$,则称 A 为反对称矩阵.

注:若 A 的元素为 a_{ij},则条件 $A'=-A$ 的等价说法即为

$$a_{ij}=-a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n,$$

亦即元素以主对角线反号对称.

3. 幂等矩阵

令 A 为 n 阶方阵,若有 $A^2=A$,则称 A 为幂等矩阵.

4. 幂零矩阵

令 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若有自然数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵.

5. 对合矩阵

令 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为对合矩阵.

6. 正交矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵,若有 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

注:条件 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 的等价说法为 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}^{-1}$. 可见当 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵时,求其逆只需转置.

§4.2 例 题

例 1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&1&\alpha\\0&0&1\end{pmatrix},$$

试求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3$,并进而求 $\boldsymbol{A}^n$.

分析 此题的主要目的是求 $\boldsymbol{A}^n$. 但需计算 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3$ 找出规律然后用数学归纳法证明.

解 直接计算

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&2\alpha&\alpha^2+2\beta\\0&1&2\alpha\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&3\alpha&3\alpha^2+3\beta\\0&1&3\alpha\\0&0&1\end{pmatrix},$$

这样可以猜测

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}1&n\alpha&\dfrac{n(n-1)}{2}\alpha^2+n\beta\\0&1&n\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

用数学归纳法证明:

1) 当 $n=1,2$ 时,已知成立;

2) 设 $n=k$ 时成立. 那么,当 $n=k+1$ 时,有

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&k\alpha&\dfrac{k(k-1)}{2}\alpha^2+k\beta\\0&1&k\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&1&\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & (k+1)\alpha & \frac{(k+1)k}{2}\alpha^2+(k+1)\beta \\ 0 & 1 & (k+1)\alpha \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

所以,上述猜测正确.

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

这里 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$,求 A^{-1}.

分析 由 A 的构造知,如果对矩阵作如下的分块

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & A_1 \\ A_2 & \mathbf{0}\end{pmatrix},$$

其中 A_1 为右上角的一块,为对角形矩阵,对角形矩阵的逆易求,而 A_2 为左下角的一块,即 a_n,其逆为 a_n^{-1},则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & A_1 \\ A_2 & \mathbf{0}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

例 3 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}7 & 9 \\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 \\ -1 & -3\end{pmatrix}.$$

分析 解形如 $AXB=C$ 的矩阵方程,其中 A,B 可逆,即求 $X=A^{-1}CB^{-1}$,可以借助矩阵的初等变换求解.

解 作矩阵的初等行变换:

$$(A,C)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3\end{pmatrix}.$$

再作矩阵的初等列变换:

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \\ 5 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -9 & 17 \\ -7 & 12 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} -9 & 17 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}.$$

例 4 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且满足 $AB + E = A^2 + B$,求 B.

解 由 $AB + E = A^2 + B$ 得$(A - E)B = A^2 - E$,而

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{可逆},$$

所以 $$B = (A - E)^{-1}(A^2 - E) = (A - E)^{-1}(A - E)(A + E)$$

$$= A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 5 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

且$|A| = 2$,求$(A^*)^{-1}$.

解 因 $A^* = |A|A^{-1}$,则

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

例 6 令 3 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

且$|A| = 4$,而 $A^*X = A^{-1} + 2X$,试求矩阵 X.

解 因 $$A^*X = A^{-1} + 2X,$$

故有

$$(A^{*}-2E)X=A^{-1},$$
$$(AA^{*}-2A)X=E,(|A|E-2A)X=E.$$
可见,矩阵$(|A|E-2A)$可逆,于是

$$X=(|A|E-2A)$$
$$=\left(2\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

例 7 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

求所有与 A 可交换的矩阵.

解 由于

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}=E+C,$$

设 $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$与 A 可交换,即

$$AB=BA,(E+C)B=B(E+C),$$

于是,$CB=BC$,即

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2a_2&2b_2&2c_2\\3a+a_1+a_2&3b+b_1+b_2&3c+c_1+c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3c&c&2b+c\\3c_1&c_1&2b_1+c_1\\3c_2&c_2&2b_2+c_2\end{pmatrix}.$$

由对应元素相等,得

$$a=b_1-\frac{1}{3}a_1,b=0,c=0,a_2=\frac{3}{2}c_1,b_2=\frac{1}{2}c_1,c_2=b_1+\frac{1}{2}c_1.$$

所以
$$B=\begin{pmatrix}b_1-\frac{1}{3}a_1&0&0\\a_1&b_1&c_1\\\frac{3}{2}c_1&\frac{1}{2}c_1&b_1+\frac{1}{2}c_1\end{pmatrix}.$$

例 8 设有 5×3 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&3&5\\1&-1&-1\\4&2&4\end{pmatrix},$$

试求 A 的广义逆矩阵.

分析 当秩$(A)=r$ 时,则对 $m\times n$ 的矩阵 A,其广义逆,则可通过求可逆矩阵 P,Q,使得 PAQ 为 A 的等价标准形,这时,A 的广义逆

$$G=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & C_{r\times(m-r)}\\ D_{(n-r)\times r} & F_{(n-r)\times(m-r)}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

一般,求 $m\times n$ 矩阵 A 的等价标准形 B,可以作如下的变化,

$$\begin{pmatrix}A & E_m\\ E_n & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}B & P\\ Q & 0\end{pmatrix},$$

则有 $PAQ=B$.

解 先求可逆矩阵 P,Q.

$$\begin{pmatrix}A & E_5\\ E_3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0&0&0\\2&2&2&0&1&0&0&0\\3&5&3&0&0&1&0&0\\1&-1&-1&0&0&0&1&0\\4&2&4&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&-2&1&0&0&0\\0&0&0&-1&-1&1&0&0\\0&0&0&1&-1&0&1&0\\0&0&0&0&-2&0&0&1\\1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0&0&0&0&0\\0&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

取
$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\-1&-1&1&0&0\\1&-1&0&1&0\\0&-2&0&0&1\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

那么，A 的广义逆矩阵为形如

$$G=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&a_1&a_2&a_3\\0&1&a_4&a_5&a_6\\a_7&a_8&a_9&a_{10}&a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\-1&-1&1&0&0\\1&-1&0&1&0\\0&-2&0&0&1\end{pmatrix}^{-1},$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,11)$ 为数域 P 中的任意数.

例 9 设 A,B 都是 n 阶方阵，若 $A+B,A-B$ 均可逆，试证明分块矩阵

$$D=\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}$$

可逆，且求其逆矩阵.

分析 我们知道，当 A,B,C 为 n 阶矩阵时，$2n$ 阶方阵

$$D=\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}$$

的行列式 $|D|$ 若按前 n 行展开，由拉普拉斯定理可得 $|D|=|A||B|$. 因此，对于所给的 $2n$ 阶方阵 D，设法变成如此情况即可.

证明 由于

$$|D|=\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A+B&B\\B+A&A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A+B&B\\0&A-B\end{vmatrix}$$
$$=|A+B||A-B|\neq0,$$

所以 D 可逆. 令 $D^{-1}=\begin{pmatrix}D_1&D_2\\D_3&D_4\end{pmatrix}$，则由 $DD^{-1}=E_{2n}$，即

$$\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1&D_2\\D_3&D_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n&0\\0&E_n\end{pmatrix},$$

得
$$\begin{cases}AD_1+BD_3=E_n,\\BD_1+AD_3=0,\\AD_2+BD_4=0,\\BD_2+AD_4=E_n.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases} D_1=\dfrac{1}{2}[(A+B)^{-1}+(A-B)^{-1}], \\ D_2=\dfrac{1}{2}[(A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}], \\ D_3=D_2, \\ D_4=D_1. \end{cases}$

故 $$D^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}[(A+B)^{-1}+(A-B)^{-1}] & \dfrac{1}{2}[(A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}] \\ \dfrac{1}{2}[(A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}] & \dfrac{1}{2}[(A+B)^{-1}+(A-B)^{-1}] \end{pmatrix}.$$

例 10 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵,证明:当 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 可逆时,$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 也可逆.

证明 因为

$$\begin{vmatrix} E & B \\ A & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & A \\ B & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix},$$

而 $$\begin{vmatrix} E & B \\ A & E \end{vmatrix} = |E-AB|,\quad \begin{vmatrix} E & A \\ B & E \end{vmatrix} = |E-BA|,$$

因此 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|\neq 0$,即知 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 可逆.

例 11 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶正交矩阵,证明:$a_{ij}=\pm A_{ij}$,其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

证明 因 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵,则 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{E}$,于是 $|\boldsymbol{AA}'|=|\boldsymbol{E}|$,即 $|\boldsymbol{A}|^2=1$,故 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$.

又 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\pm\boldsymbol{A}'$,亦即

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

由此知,$a_{ij}=\pm A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$.且当 $|\boldsymbol{A}|=1$ 时,取正号;当 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 时,取负号.

例 12 设 3 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 满足条件:

1) $a_{ij}=A_{ij}, i,j=1,2,3$;

2) $a_{33}=-1$.

试证明 $|\boldsymbol{A}|=1$,且求方程组

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的解.

证明 因 $a_{ij}=A_{ij}$，则 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}^*$，且 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，两边取行列式，得

$$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|^3,|\boldsymbol{A}|^2(|\boldsymbol{A}|-1)=0.$$

从而

$$|\boldsymbol{A}|=0 \text{ 或 } |\boldsymbol{A}|=1.$$

把 $|A|$ 按第 3 行展开，得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2.$$

因 $a_{33}=-1$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，于是 $|\boldsymbol{A}|=1$，且 $a_{31}=a_{32}=0$；由 $|\boldsymbol{A}|=1$ 可知，$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}'$，则

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}'\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}\\a_{32}\\a_{33}\end{pmatrix}.$$

所以，$x_1=a_{31}=0,x_2=a_{32}=0,x_3=a_{33}=-1$.

点评 从上两例来看，抓住所给条件暗示的结论是十分重要的，因为这样往往是着手证明的突破口. 条件 $a_{ij}=A_{ij}$，这实际上告知了我们 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}'$，再利用 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，取行列式之后，其证明的主要过程就基本上完成了. 应熟练应用公式

$$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

它在整个证明过程中扮演了主要角色.

例 13 令 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，且

$$f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}.$$

试证明

1) $(\boldsymbol{E}+f(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{E}$;

2) $f(f(\boldsymbol{A}))=\boldsymbol{A}$.

证明 1)

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{E}+f(\boldsymbol{A}))(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\\&=(\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\\&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\\&=2\boldsymbol{E};\end{aligned}$$

2) $f(f(\boldsymbol{A}))=(\boldsymbol{E}-f(\boldsymbol{A}))(\boldsymbol{E}+f(\boldsymbol{A}))^{-1}$，由 1) 知

$$(\boldsymbol{E}+f(\boldsymbol{A}))^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}).$$

代入上式，得

$$f(f(\boldsymbol{A}))=(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1})\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$$
$$=\boldsymbol{A}.$$

点评 这是一个代入类的典型问题，只要注意在代入之后巧妙地进行整理，便可达到目的.

例 14 如果可逆的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素的和为 a，试证明：$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和为 a^{-1}.

证明 证法 1 条件 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 a，亦即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，仍由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知 $a\neq0$，于是，

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{-1}\\a^{-1}\\\vdots\\a^{-1}\end{pmatrix},$$

此即表明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和为 a^{-1}.

证法 2 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq0$. 把 $|\boldsymbol{A}|$ 的第 $2,3,\cdots,n$ 列都加到第 1 列，之后提出 a，再将新的行列式按第 1 列展开得

$$|\boldsymbol{A}|=a(A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}).$$

由于 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，故 $a\neq0$，从而

$$\frac{A_{11}}{|\boldsymbol{A}|}+\frac{A_{21}}{|\boldsymbol{A}|}+\cdots+\frac{A_{n1}}{|\boldsymbol{A}|}=a^{-1}.$$

注意到 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$，因此上式即表明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1 行元素之和为 a^{-1}.

同理可证 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 $2,3,\cdots,n$ 行元素之和也为 a^{-1}.

例 15 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 的实矩阵，求证：

$$\text{秩}(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})-\text{秩}(\boldsymbol{E}_s-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')=n-s.$$

分析 $\boldsymbol{A}$ 为 $s\times n$ 的矩阵，则 $\boldsymbol{A}'$ 为 $n\times s$ 的矩阵，于是，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$ 为 $s\times s$ 的矩阵，

$A'A$ 为 $n\times n$ 的矩阵.根据要证的结论,现在需构作新矩阵

$$E_n - A'A \text{ 和 } E_s - AA'.$$

而这可利用分块阵

$$\begin{pmatrix} E_s & A \\ A' & E_n \end{pmatrix},$$

对其施以适当的变换就可以达到目的.

证明 作矩阵

$$B=\begin{pmatrix} E_s & A \\ A' & E_n \end{pmatrix},$$

于是 $$\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ -A' & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & A \\ A' & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & E_n-A'A \end{pmatrix},$$

所以,秩$(B)=s+$秩$(E_n-A'A)$.又因为

$$\begin{pmatrix} E_s & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & A \\ A' & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ -A' & E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_s-AA' & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix},$$

所以, $$\text{秩 } B = n + \text{秩}(E_n - AA').$$

$$\text{秩}(E_n - A'A) - \text{秩}(E_n - AA') = n - s.$$

例 16 令 $A=(a_{ij})_{s\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times m}$,证明:秩$(AB)\geqslant$秩$(A)+$秩$(B)-n$.

证明 令秩$(A)=r_1$,秩$(B)=r_2$,秩$(AB)=r$,则对于 A,有可逆矩阵 $P_{s\times s}$ 和可逆矩阵 $Q_{n\times n}$ 使

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $$PAB=PAQQ^{-1}B=\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}B.$$

令 $$Q^{-1}B=\begin{pmatrix} C_{r_1\times m} \\ C_{(n-r_1)\times m} \end{pmatrix},$$

从而 $$PAB=\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{r_1\times m} \\ C_{(n-r_1)\times m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{r_1\times m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以,秩$(C_{r_1\times m})=$秩$(AB)=r$,但秩$(Q^{-1}B)=$秩$(B)=r_2$,且注意到 $Q^{-1}B$ 的分块,则

$$\begin{aligned} r_2 &= \text{秩}(Q^{-1}B) \\ &\leqslant \text{秩}(C_{r_1\times m}) + \text{秩}(C_{(n-r_1)\times m}) \end{aligned}$$

$$\leqslant r+(n-r_1).$$

于是 $r_2 \leqslant r+(n-r_1)$，此即 $r \geqslant r_1+r_2-n$.

点评 完成这一结论的证明，用到的主要结论就是

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{r_1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

至于下面的工作基本上是技术处理，如对 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的合理分块，这种合理性是尽可能的将 $\boldsymbol{A}$ 的秩与 $\boldsymbol{AB}$ 的秩联系在一起.

例 17 令 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 的矩阵，秩$(\boldsymbol{A})=r$，证明：$\boldsymbol{A}$ 可表成 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证明 由于秩$(\boldsymbol{A})=r$，则有 $m\times m$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $n\times n$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}.$$

对上式左乘 $\boldsymbol{P}^{-1}$，右乘 $\boldsymbol{Q}^{-1}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\\
&=\boldsymbol{P}^{-1}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right.\\
&\qquad\left.+\cdots+\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right\}\boldsymbol{Q}^{-1}\\
&=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}+\cdots+\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1},\\
&=\boldsymbol{A}_1+\cdots+\boldsymbol{A}_r.\end{aligned}$$

这里

$$A_i = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

元素 1 在 A_i 的第 i 行，i 列，显然 $A_i(i=1,2,\cdots,r)$ 的秩为 1.

例 18 令 $A_1, A_2, \cdots, A_p$ 都是 n 阶矩阵，且 $A_1A_2\cdots A_p = 0$，证明：这 p 个矩阵的秩之和 $\leqslant (p-1)n$.

证明 因为

$$\begin{aligned} 0 &= \text{秩}(A_1A_2\cdots A_p) \\ &\geqslant \text{秩}(A_1) + \text{秩}(A_2\cdots A_p) - n \\ &\geqslant \text{秩}(A_1) + \text{秩}(A_2) + \text{秩}(A_3\cdots A_p) - 2n \\ &\geqslant \cdots \\ &\geqslant \text{秩}(A_1) + \text{秩}(A_2) + \cdots + \text{秩}(A_p) - (p-1)n, \end{aligned}$$

所以

$$\text{秩}(A_1) + \text{秩}(A_2) + \cdots + \text{秩}(A_p) \leqslant (p-1)n.$$

点评 这个结论的证明，反复利用了例 16，依次向下推，直到推出结论. 因此，问题的关键就是牢记结论：

$$\text{秩}(AB) \geqslant \text{秩}(A) + \text{秩}(B) - n.$$

另外，这一结论不可与下面的结论相混，即秩$(AB) \leqslant \min[\text{秩}(A), \text{秩}(B)]$.

例 19 已知 A 为 n 阶可逆的反对称矩阵，b 为 n 元列向量. 又设

$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix},$$

证明：秩$(B) = n$.

分析 方阵 B 为 $n+1$ 阶的，且由 B 的构造知，秩$(B) \geqslant$ 秩 A，而 A 可逆，则秩$(A) = n$，这时若能推出 $|B| = 0$，则结论便得到了证明.

证明 因为 A 可逆，且为 n 阶，则秩$(A) = n$，而 B 为 $n+1$ 阶的，所以，秩$(B) \geqslant$ 秩(A)，即知，秩$(B) \geqslant n$.

又 A 若为反对称矩阵，且奇数阶反对称矩阵的行列式为 0，故 A 的阶数 n 为偶数，从而，B 为奇数阶的. 作矩阵

$$C = \begin{pmatrix} A & -b \\ b' & 0 \end{pmatrix},$$

则 C 为奇数阶反对称矩阵，所以，$|C| = 0$. 而

$$\begin{aligned} |B| = |B'| &= \begin{vmatrix} A' & b \\ b' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A & b \\ b' & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A & -b \\ b' & 0 \end{vmatrix} = |C| = 0. \end{aligned}$$

从而，秩$(\boldsymbol{B})=n$.

例 20 令 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\boldsymbol{P}$ 上秩为 r 的 $m\times n$ 的矩阵，$r>0$. 试证：存在秩为 r 的 $m\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{F}$ 和秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{G}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG}$.

证明 因秩 $\boldsymbol{A}=r$，则有 $m\times m$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $n\times n$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}[\boldsymbol{E}_r,\boldsymbol{0}]\boldsymbol{Q}.$$

取 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{G}=[\boldsymbol{E}_r,\boldsymbol{0}]\boldsymbol{Q}$，则 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$ 分别是秩为 r 的 $m\times r$ 矩阵和秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵，且有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG}$.

点评 这是较为简单的矩阵分解问题，从上面的分析和证明可以看出，只要记住结论

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q},$$

同时给以适当的变化，即可得到证明. 但需注意的是，上面的结论有时写成

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

方便一些，下例就是.

例 21 令 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$. 证明：

1) 秩$(\boldsymbol{A})$ + 秩$(\boldsymbol{B})\leqslant n$；

2) 对于 $\boldsymbol{A}$，必存在矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得秩$(\boldsymbol{A})$ + 秩$(\boldsymbol{B})=k$，其中秩$(\boldsymbol{A})\leqslant k\leqslant n$.

证明 1) 令秩$(\boldsymbol{A})=r$，则以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含 $n-r$ 个解向量，而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n)=\boldsymbol{0},$$

从而，

$$\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{AB}_2=\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{AB}_n=\boldsymbol{0}.$$

这说明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.

所以，秩$(\boldsymbol{B})\leqslant n-r$，即秩$(\boldsymbol{A})$ + 秩$(\boldsymbol{B})\leqslant n$；

2) 因秩$(\boldsymbol{A})=r$，则有 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

作矩阵
$$B=Q\begin{pmatrix}0 & & \\ & E_{k-r} & \\ & & 0\end{pmatrix}P,$$
则有
$$AB=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}Q\begin{pmatrix}0 & & \\ & E_{k-r} & \\ & & 0\end{pmatrix}P=0,$$
得秩(A)+秩(B)$=k(r\leqslant k\leqslant n)$.

点评 对于1),用到的主要知识是齐次线性方程组的基础解系所含向量的个数,以及由条件 $AB=0$ 得知 B 的列向量为齐次线性方程组的解向量;而对于2),矩阵构造的基础却是常用的结论,即
$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$
这一结论是矩阵这一章的主要结论之一.

例 22 令 A 为 $n\times s$ 的实矩阵,A 的 s 个列向量线性无关.证明:存在列向量线性无关的矩阵 $B_{n\times(n-s)}$,使矩阵 $P=[A,B]$ 可逆,且有 $B'A=0$.

证明 因秩(A)$=s$,则秩(A')$=s$.于是齐次线性方程组 $A'X=0$ 的基础解系中含 $n-s$ 个线性无关的解向量:$\beta_{s+1},\cdots,\beta_n$.作矩阵 $B=(\beta_{s+1},\cdots,\beta_n)$,则 $A'B=0$,从而 $B'A=0$.

下面证明矩阵 $P=(A,B)$ 可逆,因为
$$P'P=\begin{pmatrix}A'\\ B'\end{pmatrix}(A,B)=\begin{pmatrix}A'A & A'B\\ B'A & B'B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A'A & 0\\ 0 & B'B\end{pmatrix},$$
且 A,B 的列向量都线性无关,则 $|A'A|\neq 0,|B'B|\neq 0$,
所以
$$|P'P|=|A'A||B'B|\neq 0,$$
$$|P'||P|\neq 0,$$
从而 $|P|\neq 0$,P 可逆.

点评 此例的巧妙之处是构作齐次线性方程组 $A'X=0$.这是因为这时此方程组中有 $n-s$ 个线性无关的解向量 $\beta_{s+1},\cdots,\beta_n$,这正是要作的矩阵 B 的列向量.矩阵 B 作出后,而矩阵 $P=(A,B)$ 便拼凑而成.

例 23 令 A 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶方阵,证明:$|A^*|=|A|^{n-1}$.

证明 因为
$$AA^*=A^*A=|A|E,$$
得
$$|A||A^*|=|A|^n.$$
当 $|A|\neq 0$ 时,则可得 $|A^*|=|A|^{n-1}$.当 $|A|=0$ 时,必有 $|A^*|=0$,否则,A^* 可逆,则由 $AA^*=|A|E$ 得

$$A=|A|(A^*)^{-1}=0.$$

于是 $A^*=0$,这与 A^* 可逆矛盾,从而,这时也有 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

点评 此例用到的重要知识点为 $AA^*=A^*A=|A|E$,在取行列式之后的讨论,只要注意到在 $|A|=0$ 时,敢于大胆肯定 $|A^*|=0$,但必须指出若 $|A^*|\neq0$ 所产生的矛盾.

例 24 令 A 为 $n(n\geqslant2)$ 阶方阵,试推导秩(A)与秩$(A)^*$ 的关系.

证明 1) 当秩 $A=n$ 时,则 $|A|\neq0$, A 是可逆的,即有 A^{-1} 存在,所以

$$A^*=|A|A^{-1}.$$

可见,秩 $A^*=n$. 反之,当秩 $A^*=n$ 时, A^* 可逆,则有 $(A^*)^{-1}$ 存在,所以

$$A=|A|(A^*)^{-1},$$

必有 $|A|\neq0$,否则,由上式知 $A=0$,从而 $A^*=0$,这与秩$(A^*)=n$ 矛盾,所以 $|A|\neq0$,于是,秩$(A)=n$;

2) 当秩$(A)=n-1$ 时,则 A 必有一个 $n-1$ 阶子式不为 0,即 A^* 中至少有一个元素不为 0,所以,秩$(A^*)\geqslant1$,另外秩$(A)=n-1$,则 $|A|=0$,于是,

$$AA^*=|A|E=0.$$

从而,秩(A)+秩$(A^*)\leqslant n$,故秩$(A^*)\leqslant1$. 这便知秩$(A^*)=1$. 反之,若秩$(A^*)=1$,即 A^* 中必有一个 $A_{ij}\neq0$,则 A 必有一个 $n-1$ 阶子式不为 0,于是秩$(A)\geqslant n-1$,但不能有秩$(A)>n-1$,即不能有秩$(A)=n$,否则,有秩 $A^*=n$,而 $n\geqslant2$,这样与秩$(A^*)=1$ 矛盾,所以秩$(A)\neq n$,则秩$(A)\leqslant n-1$,因此,秩$(A)=n-1$.

3) 当秩$(A)<n-1$ 时,则 A 中一切 $n-1$ 阶子式均为 0,于是一切 $A_{ij}=0$, $A^*=0$,所以,这时有秩$(A^*)=0$,反之,若秩$(A^*)=0$,则 $A^*=0$,即一切 $A_{ij}=0$. 亦即 A 的一切 $n-1$ 阶子式为 0,所以,秩$(A)<n-1$.

总之,秩(A)与秩(A^*)之间的关系为

$$秩(A^*)=\begin{cases}n\Leftrightarrow 秩(A)=n;\\1\Leftrightarrow 秩(A)=n-1;\\0\Leftrightarrow 秩(A)<n-1.\end{cases}$$

点评 这是矩阵一章中综合性较强的问题,一方面注意到矩阵 A 的秩等于 A 的非零子式的最高阶数,另一方面注意到 A^* 的元素都是 A 的元素的 $n-1$ 阶子式.

例 25 令 A 为 $n(n\geqslant2)$ 阶方阵,试推导 A 与 $(A^*)^*$ 的关系.

证明 1) 若 $n=2$,由伴随矩阵的构造易知 $(A^*)^*=A$.

2) 若 $n\geqslant3$,我们分以下情况来讨论:

1° 当 $|A|=0$ 时,则由上例知,秩$(A^*)\leqslant1$,所以,

$$秩(A^*)^*=0, (A^*)^*=0;$$

2° 当$|A|\neq 0$时，则秩$(A)=n$，从而，秩$(A^*)=n$于是，A^*可逆，且由$A^*=|A|A^{-1}$得

$$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A.$$

总之，A与$(A^*)^*$之间的关系是

$$(A^*)^*=\begin{cases}A, & \text{当 } n=2 \text{ 时；}\\ |A|^{n-2}A, & \text{当 } n\geqslant 3 \text{ 时.}\end{cases}$$

例 26 令A,B都是$n\times n$的可逆矩阵，证明：$(AB)^*=B^*A^*$.

证明 因A,B为$n\times n$的可逆矩阵，则AB也为$n\times n$的可逆矩阵，从而

$$\begin{aligned}(AB)^*&=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}\\&=(|B|B^{-1})(|A|A^{-1})=B^*A^*.\end{aligned}$$

§4.3 习　　题

1. 设

$$1)\ A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix};$$

$$2)\ A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix}.$$

计算AB，$AB-BA$.

2. 计算

$$1)\ \begin{pmatrix}3&1&1\\3&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}^2;\quad 2)\ \begin{pmatrix}3&2\\-4&-2\end{pmatrix}^5;$$

$$3)\ \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}^n;\quad 4)\ \begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^n;$$

$$5)\ (2,3,-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}(2,3,-1);$$

$$6)\ (x,y,1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\b_1&b_2&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix};$$

7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n$;

8) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

3. 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n);$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 设 $f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_m$，$\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 矩阵，定义

$$f(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{A}^m + a_1\boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + a_m\boldsymbol{E},$$

1) $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$；

2) $f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 3$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$，

试求 $f(\boldsymbol{A})$.

5. 如果 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就称与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，设

1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$； 2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$； 3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

求所有与 A 可交换的矩阵.

6. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,证明:当且仅当

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\0&a&b&c\\0&0&a&b\\0&0&0&a\end{pmatrix}$$

时,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

7. 设矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_n\end{pmatrix},$$
其中 $a_i\neq a_j,i,j=1,2,\cdots,n$,证明与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

8. 令矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\boldsymbol{E}_1&\boldsymbol{0}&\cdots&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&a_2\boldsymbol{E}_2&\cdots&\boldsymbol{0}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\cdots&a_r\boldsymbol{E}_r\end{pmatrix},$$
其中 $a_i\neq a_j,i\neq j(i,j=1,2,\cdots,r)$,$\boldsymbol{E}_i$ 是 n_i 阶单位矩阵 $\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n$,证明与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵只能是准对角矩阵:
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_r\end{pmatrix},$$
其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 n_i 阶矩阵.

9. 令 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为 i 行 i 列的元素为 1,其余元素全为零的 n 阶矩阵,而 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,证明:

1) 如果 $\boldsymbol{AE}_{12}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$,那么,当 $k\neq1$ 时,有 $a_{k1}=0$,当 $k\neq2$ 时 $a_{2k}=0$;

2) 若 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$,则当 $k\neq i$ 时 $a_{ki}=0$,当 $k\neq j$ 时,$a_{jk}=0$ 且 $a_{ii}=a_{jj}$;

3) 若 $\boldsymbol{A}$ 与所有 n 阶矩阵可交换,则 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵.

10. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$, 证明: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$;$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}$.

11. 举例说明：当 $AB = AC$ 时，未必 $B = C$.

12. 若 $A = \frac{1}{2}(B + E)$，证明：$A^2 = A$ 的充分必要条件是 $B^2 = E$.

13. 令 A 为实对称矩阵，证明：当 $A^2 = 0$ 时，$A = 0$.

14. 令 A, B 都是 $n \times n$ 的对称矩阵，证明：AB 对称当且仅当 $AB = BA$.

15. 证明：任一 $n \times n$ 矩阵都可以表成一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

16. 证明：对任意 $n \times n$ 矩阵 A, B 都有 $AB - BA \neq E$.

17. 令 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, k = 0, 1, \cdots, n$;

$$a_{ij} = s_{i+j-2}; i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

证明 $|a_{ij}| = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2$.

18. 令 A 为 $n \times n$ 矩阵，证明：存在一个 $n \times n$ 非零的矩阵 B，使得 $AB = 0$. 当且仅当 $|A| = 0$.

19. 令 A 为 $n \times n$ 矩阵，如果对任意 n 维向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

都有 $AX = 0$，则 $A = 0$. 证明之.

20. 令 B 为 $r \times r$ 矩阵，C 为 $r \times n$ 矩阵，且秩$(C) = r$，证明：

1）若 $BC = 0$，则 $B = 0$;

2）若 $BC = C$，则 $B = E$.

21. 证明：设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵，则秩$(A + B) \leqslant$ 秩(A) + 秩(B).

22. 证明：若 $A^k = 0$，那么 $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$.

23. 求下列矩阵的逆矩阵

1）$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc = 1$;

2）$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;　　3）$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4）$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;　　5）$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}3&3&-4&-3\\0&6&1&1\\5&4&2&1\\2&3&3&2\end{pmatrix}$;　　7) $A=\begin{pmatrix}1&3&-5&7\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\3&2&0&0\\5&7&1&8\\-1&-3&-1&-6\end{pmatrix}$; 9) $A=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&3&1&4\\2&7&6&-1\\1&2&2&-1\end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$;　　11) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-3&1\end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{pmatrix}$;这里 $\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi$

13) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&-3&4\\0&1&-1&2&-3\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

24. 求矩阵 X.

1) $\begin{pmatrix}1&5\\2&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$;　　2) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&2\end{pmatrix}$;

4) $X\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$;

25. 设 A,B 都是 n 阶矩阵,证明:若 $AB=E$,则 A 和 B 互为逆矩阵.

26. 证明:1) 如果 A 对称(反对称),则 A^{-1} 也对称(反对称);

2) 不存在奇数阶的可逆反对称矩阵.

27. 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$称为上(下)三角矩阵,若 $i>j(i<j)$时 $a_{ij}=0$,证明:

1) 两个上(下)三角矩阵的乘积仍是上(下)三角矩阵;

2) 可逆的上(下)三角的矩阵的逆仍是上(下)三角矩阵.

28. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵,$\lambda\neq 0$,证明:

$$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB}|=\lambda^{n-m}|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA}|.$$

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵,秩 $\boldsymbol{A}=1$. 证明:

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}[b_1,b_2,\cdots,b_n]$;　　2) $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$.

30. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2×2 矩阵,证明:若 $\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{0}$,$l\geqslant 2$,则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$.

31. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,证明:秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$+秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

32. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,证明:秩$(\boldsymbol{A})$+秩$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

33. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 $n\times n$ 的矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$,证明:

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|.$$

34. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵,秩$(\boldsymbol{A})=r$. 证明:存在一个 $n\times n$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{PAP}^{-1}$的后 $n-r$ 行全为零.

35. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组若是线性无关的,就称该矩阵为列(行)满秩矩阵.设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times r$ 矩阵,证明:$\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵的充分必要条件是存在 $m\times m$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix}.$$

同样,$\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵的充分必要条件为存在 $r\times r$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{0}]\boldsymbol{Q}.$$

§4.4 习题答案与提示

1. 1)
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}6&2&-2\\6&1&0\\8&-1&2\end{pmatrix},\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}4&0&0\\4&1&0\\4&3&4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&0&0\\4&-4&-2\end{pmatrix}.$$

2)

$$AB=\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} a+ac+c & b+ab+c & 2c+a^2 \\ a+bc+b & 2b+b^2 & c+ab+b \\ 2a+c^2 & b+bc+a & c+ac+a \end{pmatrix},$$

$$AB-BA=(a_{ij})_{3\times 3}.$$

这里

$$a_{11}=b-ac, a_{12}=a^2+b^2+c^2-b-ab-c,$$
$$a_{13}=b^2+2ac-a^2-2c, a_{21}=b-bc,$$
$$a_{22}=2ac-2b, a_{23}=a^2+b^2+c^2-ab-b-c,$$
$$a_{31}=3-c^2-2a, a_{32}=c-bc, a_{33}=b-ac.$$

2．1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

3）可用数学归纳法证明：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4）可用数学归纳法证明：

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$$

5)

$$(2,3,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}(2,3,-1)=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6）原式 $=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c$.

7）令 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，由计算得 $A^2=2^2E$，对于 A^n：

1°．当 $n=2k$ 时，$A^n=2^nE$；

2°. 当 $n=2k+1$ 时，$\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}$.

8）可用数学归纳法证明：

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -2 & -4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -3\\ 3 & 0 & 5\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 6 & 5\\ -7 & -2 & -7\end{pmatrix};$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n a_ib_i;$$

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & \cdots & a_1b_n\\ \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9 & 16\\ -5 & 5 & 9\\ 12 & 26 & 32\end{pmatrix}.$$

4. 1) $$f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ 8 & 0 & 3\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

2) $$f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

5. 设与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的任意矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则

1) $$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}.$$

2) $$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1-\frac{1}{3}a_1 & 0 & 0\\ a_1 & b_1 & c_1\\ \frac{3}{2}c_1 & \frac{1}{2}c_1 & b_1+\frac{1}{2}c_1\end{pmatrix}.$$

3)
$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

6. 提示：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

时，可直接验证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，可设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{4\times4}$，求出 $\boldsymbol{B}$ 为如上形式.

7. 提示：令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 得 $\quad a_i x_{ij}=a_j x_{ij},\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$，

即 $(a_i-a_j)x_{ij}=0$，则当 $a_i\neq a_j\ (i\neq j)$ 时，$x_{ij}=0$，从而

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} x_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

8. 提示：仿上题，令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rr} \end{pmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{B}_{ij}$ 为 $n_i\times n_j$ 阶矩阵，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可得 $a_i\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{B}_{ij}=a_j\boldsymbol{E}_j\boldsymbol{B}_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$，

$$(a_i-a_j)\boldsymbol{B}_{ij}=\boldsymbol{0},$$

从而，当 $a_i\neq a_j\ (i\neq j)$ 时，$\boldsymbol{B}_{ij}=\boldsymbol{0}$，所以

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{B}_{rr} \end{pmatrix}.$$

9. 提示：

1) 由 $\boldsymbol{AE}_{12}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$ 得

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

从而,$a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0, a_{21} = a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$,即当 $k \neq 1$ 时,$a_{k1} = 0, k \neq 2$ 时,$a_{2k} = 0$.

2) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$,仿 1)易得结论,

3) 因 $\boldsymbol{A}$ 与所有 n 阶矩阵可换,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 可换,由 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$ 得

$$a_{ii} = a_{jj} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

所以,$\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵.

10. 略.

11. 如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,有

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{AC}, \text{但 } \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{C}.$$

12. 提示:由 $\boldsymbol{A}^2 = \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E})\right)^2$ 展开.

13. 证明:因 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$,则 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = 0$.于是

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

又 a_{ij} 均为实数$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,所以

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

从而,$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

14. 略.

15. 提示:$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}') + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}')$.

16. 提示:考虑 $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$ 的主对角线上元素之和.

17. 证明:

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 .$$

18. 提示:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$,说明 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

19. 提示:取 n 维向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (i)$,由 $\boldsymbol{A\varepsilon}_i=\boldsymbol{0}$ 可得 $a_{ij}=0$,从而,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

20. 1) 提示:因秩($\boldsymbol{C}$)$=r$,则可设 $\boldsymbol{C}$ 的左上角 r 阶子式$\neq\boldsymbol{0}$,再由 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{0}$ 得齐次线性方程组

$$\begin{cases} b_{i1}c_{11}+\cdots+b_{ir}c_{r1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{i1}c_{1r}+\cdots+b_{ir}c_{rr}=0, \end{cases}$$

且这个方程组只有零解.所以,$b_{i1}=\cdots=b_{ir}=0 \quad (i=1,2,\cdots,r)$,于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

2) 由 1)可立得.

21. 提示:令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n)$,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_n).$$

22. 提示:乘开$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})$后即可知.

23. 1) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. 2) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

3) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. 4) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$.

7) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 11 & -38\\0 & 1 & -2 & 7\\0 & 0 & 1 & -2\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 8) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\-3 & 2 & 0 & 0\\-5 & 7 & -3 & -4\\2 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

9) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{10}{3}\\-\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{3}\\\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$.

10) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{32}\\0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16}\\0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

11) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\-13 & 6 & -1\\-29 & 13 & -2\end{pmatrix}$. 12) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\omega & \omega & \omega\\\omega & 1 & \bar{\omega}^2\\\omega & \omega^2 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{3\omega}$.

13) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

24. 1) $X=\begin{pmatrix}2 & -23\\0 & 8\end{pmatrix}$. 2) $X=\begin{pmatrix}\frac{11}{6} & \frac{1}{2} & 1\\-\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0\\\frac{2}{3} & 1 & 0\end{pmatrix}$.

3) $X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\end{pmatrix}$.　　4) $X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & \frac{5}{2} & 4\end{pmatrix}$.

25. 提示:由 $AB=E$ 两边取行列可知,$|A||B|=1$,则 $|A|\neq 0,|B|\neq 0$,A,B 均可逆.

26. 1) 略.

2) 证明:由 $A=-A'$ 取行列式得 $|A|=|-A'|=(-1)^n|A|$,则当 n 为奇数时,$|A|=-|A|$,所以 $|A|=0$.

27. 提示:对于上三角形矩阵,给出两个一般的上三角形矩阵,具体运算可知结论成立.

28. 证明:

因
$$\begin{pmatrix}E_m & 0\\ -A & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m & B\\ A & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m & B\\ 0 & \lambda E_n-AB\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}E_m & B\\ A & \lambda E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m & 0\\ -\frac{1}{\lambda}A & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_m-\frac{1}{\lambda}BA & B\\ 0 & \lambda E_n\end{pmatrix}.$$

对上两式两边分别取行列式,那么,由第一式可得
$$\begin{vmatrix}E_m & B\\ A & E_n\end{vmatrix}=|\lambda E_n-AB|;$$

由第二式可得
$$\begin{vmatrix}E_m & B\\ A & \lambda E_n\end{vmatrix}=|\lambda E_n|\left|E_m-\frac{1}{\lambda}BA\right|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|.$$

由此可知结论成立.

29. 1) 见例 23.

2) 提示:由 $A^2=AA$,这时有四个矩阵相乘,将中间两个结合.

30. 提示:仿 26 题.

31. 提示:由 $A^2=E$ 知 A 可逆,则秩$(A)=n$,又
$$秩(A+E)+秩(A-E)\geqslant 秩(A+E+A-E)=秩(A)=n,$$
且 $(A+E)(A-E)=0$,所以
$$秩(A+E)+秩(A-E)\leqslant n.$$
总之
$$秩(A+E)+秩(A-E)=n.$$

32. 提示:仿 29 题.

33. 提示:因为

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

取行列式便可知结论成立.

34. 证明:因秩(A)$=r$,则有 n 阶可逆矩阵 P,Q,使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$PA = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

所以

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}P^{-1},$$

由此知 PAP^{-1}的后 $n-r$ 行全为零.

35. 证明:充分性易知,仅证必要性.

设 A 为$m \times r$ 的列满秩矩阵,则秩(A)$=r$,不妨设 A 的左上角r 阶块矩阵可逆,这样,存在 m 阶可逆矩阵 P_1,使得

$$P_1 A = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

这里 B_1 为 r 阶可逆方阵,而

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -B_2 & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix} P_1 A = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -B_2 & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$P = \left(\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -B_2 & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix} P_1\right)^{-1},$$

则有

$$A = P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

当 A 为行满秩时,可仿上进行证明.

第五章　二　次　型

§5.1　基本知识

一、二次型及其矩阵

1．设 P 是一个数域，系数在 P 中的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

称为数域 P 上的一个 n 元二次型，简称二次型.

2．每个二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都可唯一地表示成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

其中 $\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n)'$，$\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，称为二次型 f 的矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩称为 f 的秩.

3．对称矩阵的合同关系：

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是数域 P 上的两个 n 级方阵，如果有 P 上的可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是合同的.

矩阵的合同关系具有反身性，对称性及传递性. 并且两个合同的矩阵有相同的秩，因而有相同的可逆性.

二次型经过非退化线性替换后，所得到的二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的.

二、用非退化线性替换化二次型为标准形

1．数域 P 上任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换化成标准形

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2,$$

其中非零系数的个数等于该二次型的秩.

2．在数域 P 上，任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

三、规范形

1．任意一个复系数的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范

形

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2,$$

且规范形是唯一的.

2. 两个复数对称矩阵合同的充要条件是它们的秩相等.

3. (惯性定理)任意一个实数域上的二次型都可以经实系数非退化线性替换化成规范形

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

4. 在实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形中,正平方项的个数 p 称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数;负平方项的个数 $r-p$ 称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的负惯性指数;它们的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的符号差.

5. 两个 n 元实二次型可通过实非退化线性替换互化的充要条件是,二者有相同的秩和符号差.

两个 n 级实对称矩阵在实数域上合同的充要条件是,二者有相同的秩和符号差(实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的符号差即指二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的符号差).

四、正定二次型

1. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$($\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵),如果对任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 均有 $f(c_1,\cdots,c_n)>0$. 此时称 f 为正定二次型,$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵;

如果 $f(c_1,\cdots,c_n)\geqslant 0$,则称 f 与 $\boldsymbol{A}$ 为半正定的;

如果 $f(c_1,\cdots,c_n)<0$,则称 f 与 $\boldsymbol{A}$ 为负定的;

如果 $f(c_1,\cdots,c_n)\leqslant 0$,则称 f 与 $\boldsymbol{A}$ 为半负定的.

2. 正定矩阵的判定

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级实对称矩阵,以下一些条件都是 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充要条件:

1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值都大于零;

2) $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式都大于零;

3) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$;

4) $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式大于零;

5) $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同;

6) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n.

3. 有关半正定矩阵的若干等价条件

1) $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵;

2) $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式$\geqslant 0$;

3）A 的所有 i 级主子式之和$\geqslant 0$；

4）A 的正惯性指数 $p=r=$秩(A)(或负惯性指数为 0)；

5）A 合同于$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；

6）存在实矩阵 P,使 $A=P'P$,秩$(P)=$秩(A)；

7）A 的特征值$\geqslant 0$；

8）存在半正定阵 B,使 $A=B^k$(k 是正整数).

五、对称矩阵的标准形

1. n 级实数矩阵 A 称为正交矩阵,如果 $A'A=E$；

2. 设 A 是实对称矩阵,则 A 的特征根皆为实数；

3. 设 A 是实对称矩阵,则 $\mathbf{R}^n$ 中属于 A 的不同特征值的特征向量正交；

4. 对于任意一个 n 阶实对称矩阵 A,都存在一个 n 阶正交矩阵 T,使 $T'AT=T^{-1}AT$ 成对角形；

5. 任意一个实二次型

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

都可以经过正交的线性替换变成平方和

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中平方项的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是矩阵 A 的特征多项式全部的根.

§5.2 例　　题

例 1　用非退化线性替换,化下面实二次型为标准形,并写出非退化线性替换.

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2.$$

解　解法 1　配方法.

$$f(x_1,x_2,x_3)=2[x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]+3\left[x_2^2-2\cdot\frac{2}{3}x_2x_3+\left(\frac{2}{3}x_3\right)^2\right]$$
$$+\frac{5}{3}x_3^2=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2.$$

令
$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3, \\ y_2=x_2-\dfrac{2}{3}x_3, \\ y_3=x_3, \end{cases}$$

则有 $$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2.$$

替换矩阵 $$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

由于$|C|\neq 0$,因此所作的线性替换是非退化的.

解法 2　初等变换法.

$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为$\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$,作初等变换

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{array}\right).$$

因此 $$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

即经非退化线性替换 $X=CY$ 有

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2.$$

解法 3　正交替换法.

由方程 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0,$$

得 A 的特征值为 1(二重)与 10.

1) 对于 $\lambda=1$,求解齐次线性方程组$(E-A)X=0$,得到两个线性无关的特征向量:

$$\alpha_1=(-2,1,0)',\alpha_2=(2,0,1)'.$$

先正交化:

$$\beta_1=\alpha_1=(-2,1,0)',$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(2,0,1)'+\frac{4}{5}(-2,1,0)'=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)',$$

再单位化:

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}.$$

2) 对于 $\lambda=10$,求解齐次线性方程组$(10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得一特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-2)',\text{且 }\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)'.$$

令 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,则有 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$,即经正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$ 得

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

点评 利用非退化线性替换化二次型为标准形常用的有三种方法:

方法1(配方法).即将变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 逐个配成完全平方形式.为了能配方,在二次型没有平方项时,先变换出平方项,再进行配方.

方法2(初等变换法).用非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化实二次型为标准形.具体步骤是:先求出 f 的矩阵$\boldsymbol{A}$,再作如下所示初等变换

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})\xrightarrow[\text{对 }\boldsymbol{E}\text{ 只作初等行变换}]{\text{对 }\boldsymbol{A}\text{ 作成对的初等行、列变换}}(\boldsymbol{D}\mid\boldsymbol{C}').$$

当子块 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵$\boldsymbol{D}$ 时,子块 $\boldsymbol{E}$ 也相应地化为$\boldsymbol{C}'$,并有 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$.

方法3(正交替换法).先写出二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$,再用正交替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$ 将$\boldsymbol{A}$对角化,从而

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为二次型矩阵的所有特征值,即有 $f(x_1,\cdots,x_n)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

注:用非退化线性替换化二次型为标准形除以上常用的三种方法外还有偏导数法和雅可比法.

1. 二次型化标准形的偏导数方法.

此方法与配方法实质上是相同的,但不需要凭观察去配方,而是按下列固定程序进行.

1) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$,若 $a_{11}\neq0$,求出 $f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}$,则 $f=\frac{1}{a_{11}}(f_1)^2+Q$,其中 Q 已不含变量 x_1,继续对 Q 进行类似计算,直至都配成平方项为止.

2) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 中 $a_{ii}=0,i=1,2,\cdots,n$,而 $a_{12}\neq0$,求出

$$f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1},f_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

则 $f=\frac{1}{2a_{12}}[(f_1+f_2)^2-(f_1-f_2)^2]+Q$,其中 Q 已不含 x_1,x_2,对 Q 继续进行上述计算.若 Q 中含有平方项,则可按1)中方法进行.

例 2 用偏导法将下列二次型化为标准形:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

解 1) 求出 $f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1+2x_2-2x_3$,

则 $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{a_{11}}(f_1)^2+Q=\frac{1}{2}(2x_1+2x_2-2x_3)^2+x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$

$$=2(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3.$$

再求出 $$Q_1=\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x_2}=\frac{1}{2}(2x_2-4x_3)=x_2-2x_3,$$

则 $$Q=\frac{1}{a_{22}}(Q_1)^2+\psi=(x_2-2x_3)^2-x_3^2.$$

令 $$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_3,\\y_2=x_2-2x_3,\\y_3=x_3,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3,\\x_2=y_2+2y_3,\\x_3=y_3,\end{cases}$$

可将二次型化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

2) 这时 f 中没有平方项,而 $a_{12}=\frac{1}{2}\neq0$,故用2)的方法求出

$$f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{1}{2}(x_2+x_3),$$

$$f_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_3),$$

则 $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2a_{12}}[(f_1+f_2)^2-(f_1-f_2)^2]+Q$

$$=\frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3)^2+\frac{1}{4}(x_2-x_1)^2-x_3^2.$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+2x_3,\\ y_2=-x_1+x_2,\\ y_3=x_3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2-y_3,\\ x_2=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2-y_3,\\ x_3=y_3,\end{cases}$

可将原二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4}y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2.$$

2. 二次型化标准形的雅可比方法(此方法不宜求出线性替换矩阵).

设在二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 中,

$$\Delta_1=a_{11},\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\cdots,$$

$$\Delta_{n-1}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n-1}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n-1}\end{vmatrix}$$

都不等于零,则二次型必可经非退化线性替换化为下面只含平方项的形式

$$\Delta_1y_1^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2+\cdots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}y_{n-1}^2+\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2.$$

例 3 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-8x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形.

解 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&-8&-4\\1&-4&0\end{pmatrix}.$$

$$\Delta_1=1,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-8\end{vmatrix}=-9,\Delta_3=|\boldsymbol{A}|=0.$$

故标准形为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\Delta_1y_1^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2+\frac{\Delta_3}{\Delta_2}y_3^2=y_1^2-9y_2^2.$$

又若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 中，

$$\Delta_1=a_{11},\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\cdots,$$

$$\Delta_{n-1}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n-1}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n-1}\end{vmatrix},\quad\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

全不为零,则二次型必有下面平方和的形式

$$\frac{1}{\Delta_1}y_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2+\cdots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}y_n^2$$

例 4　化二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$ 为标准形.

解　作非退化线性替换

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_{2n},\\x_2=y_2+y_{2n-1},\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n=y_n+y_{n+1},\\x_{n+1}=y_n-y_{n+1},\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_{2n-1}=y_2-y_{2n-1},\\x_{2n}=y_1-y_{2n},\end{cases}\tag{1}$$

则

$$f(x_1,\cdots,x_{2n})=y_1^2+\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2-\cdots-y_{2n}^2.\tag{2}$$

因为线性替换(1)的系数行列式为 $2n$ 级行列式

$$\begin{vmatrix}1&&&&&1\\&\ddots&&&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\\&&1&1&&\\&&1&-1&&\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&&\ddots&\\1&&&&&-1\end{vmatrix}=(-2)^n\neq0,$$

故(1)是非退化的,从而(2)是所求的标准形.

点评　这是含 $2n$ 个文字的二次型.

本例中二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 的特点是由 n 个乘积项构成,而每个文字在而且仅在一个乘积项中出现.这就可以通过线性替换把每一个乘积项都化为

平方差的形式.从而使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$成为标准形.

例5 设 f 为实二次型,若有 n 维实向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 使

$$f(\boldsymbol{X}_1)>0,f(\boldsymbol{X}_2)<0.$$

证明:必存在实 n 维向量 $\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{0}$,使 $f(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{0}$.

证明 设实二次型 $f(\boldsymbol{X})$的秩为 r,正惯性指数为 p,负惯性指数为 q,经非退化线性替换可化为规范形:

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2 \qquad (r=p+q),\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}.$$

若 $p<q$,令 $y_1=y_p=1$,其余 $y_i=0$,$\boldsymbol{Y}_0=(1,0,\cdots,0,\underset{(p)}{1},0,\cdots,0)'$,则 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{CY}_0\neq\boldsymbol{0}$.

而 $$f(\boldsymbol{X}_0)=0.$$

当 $p>q$ 或 $p=q$ 时,同理可得 $f(\boldsymbol{X}_0)=0$,且 $\boldsymbol{X}_0\neq\boldsymbol{0}$.

例6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称方阵,证明:存在正实数 c,对任意实 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有

$$|\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A\alpha}|\leqslant c\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}.$$

证明 证法1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots a_n)'$,并令

$$a=\max\{所有|a_{ij}|\},$$

则因$|a_i|\cdot|a_j|\leqslant\frac{1}{2}(a_i^2+a_j^2)$,故可得

$$\begin{aligned}|\alpha'\boldsymbol{A}\alpha|&\leqslant\left|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}a_ia_j\right|\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\cdot|a_i|\cdot|a_j|\\&\leqslant a\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_i|\cdot|a_j|\leqslant a\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{1}{2}(a_i^2+a_j^2)\\&=an\sum_{i=1}^n a_i^2=c\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha},\end{aligned}$$

其中 $c=an$.

证法2 已知 $\boldsymbol{A}$ 为实对称方阵,所以存在正交方阵 $\boldsymbol{U}$ 使

$$\boldsymbol{U}'\boldsymbol{AU}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值,且均为实数.

线性方程组 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{\alpha}$ 有唯一解,设为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$,于是有

$$\boldsymbol{U\eta}=\boldsymbol{\alpha},或\ \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{U}'\boldsymbol{\alpha}. \tag{2}$$

由(1)、(2)得

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{\alpha}'A\boldsymbol{\alpha}| &= |(U\boldsymbol{\eta})'A(U\boldsymbol{\eta})| = |\boldsymbol{\eta}'(U'AU)\boldsymbol{\eta}| \\
&= |\lambda_1 b_1^2 + \lambda_2 b_2^2 + \cdots + \lambda_n b_n^2| \leqslant c\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\eta} \\
&= c(U'\boldsymbol{\alpha})'(U'\boldsymbol{\alpha}) = c\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha},
\end{aligned}
$$

其中 $c=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$.

点评 在证法 1 中并未用到 A 是对称矩阵,而是利用公式 $x_i^2+x_j^2\geqslant 2|x_i|\cdot|x_j|$进行变换的.证法 2 则是利用定理:对于任意一个 n 级实对称矩阵 A,都存在一个 n 级正交矩阵 T,使 $T'AT=T^{-1}AT$ 成对角形进行证明的.

例 7 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

1) 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值;

2) 指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

解 1) 此二次型对应的矩阵为

$$
A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix},
$$

因秩$(A)=2$,故$|A|=0$.由此解得 $c=3$,易验证,此时 A 的秩的确为 2.进而由

$$
|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0
$$

得特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$.

2) 由 A 的特征值知,$f(x_1,x_2,x_3)=1$,可经过适当的非退化线性替换化为 $4y_2^2+9y_3^2=1$,而且经过非退化线性替换并不改变空间曲面的类型,可见这是椭圆柱面.

点评 二次型的秩为 2 是指二次型对应矩阵 A 的秩为 2,从而有$|A|=0$,由此可求出参数 c.A 的非零特征值的个数及其正负号决定了二次型的标准形,从而决定了方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

例 8 设有实二次型

$$
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2.
$$

证明:$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩等于矩阵

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}
$$

的秩.

证明 证法 1 设 $y_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n, i=1,2,\cdots,s$.

则 $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_s\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$,即$(y_1,\cdots,y_s)=(x_1,\cdots,x_n)A'$,

$$\text{故 } f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2=\sum_{i=1}^{s}y_i^2$$

$$=(y_1,\cdots,y_s)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_s\end{pmatrix}=[(x_1,\cdots,x_n)A']A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$=X'(A'A)X,\quad \text{其中 } X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

因为$(A'A)'=A'A$,故 $A'A$ 为对称矩阵,则 $A'A$ 为二次型$f(x_1,\cdots,x_n)$的矩阵,所以只需证秩$(A'A)$=秩(A).欲证此,只要证齐次线性方程组 $AX=0$与$A'AX=0$同解,事实上,若 $AX=0$,显然有 $A'AX=0$,反之若$(A'A)X=0$,则$X'(A'A)X=0$.即$(AX)'(AX)=0$,令 $AX=(b_1,\cdots,b_s)'$,即$(AX)'(AX)=0$,即 $AX=0$.

所以$(A'A)X=0$ 与 $AX=0$的基础解系中解向量的个数相等.即 $n-$秩$(A'A)=n-$秩(A).所以秩$(A'A)$=秩(A).

证法 2 设秩$(A)=r$,则存在实可逆矩阵 P,Q,使

$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $AQ=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,故 $Q'A'=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(P^{-1})'$.于是

$$Q'A'AQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(P^{-1})'P^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\tag{1}$$

因乘积$(P^{-1})'P^{-1}$为正定矩阵,故可设

$$(P^{-1})'P^{-1}=\begin{pmatrix}B_r & C\\ D & M\end{pmatrix},$$

其中$|B_r|>0$.代入(1)式,得 $Q'A'AQ=\begin{pmatrix}B_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,即 $Q'A'AQ$ 的秩是r.又因 Q 是可逆矩阵,故秩$(A'A)$=秩$(Q'A'AQ)=r$=秩(A).于是,二次型 f 的秩等于矩阵A 的秩.

点评 证法 1 的思路是求所给二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$的矩阵及此矩阵与题设

中矩阵 $A=(a_{ij})_{s\times n}$ 的关系，可求得二次型的矩阵为 $A'A$，所以转化成证明 $A'A$ 和 A 等秩，又转化为证齐次线性方程组 $(A'A)X=0$ 与 $AX=0$ 同解.

证法 2 是用定理：若秩$(A)=r$，则存在可逆矩阵 P,Q 使 $PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，然后根据矩阵及正定矩阵的知识进行证明的.

例 9 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+t}^2$，其中 $l_i(i=1,2,\cdots,s+t)$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的实系数一次齐次式. 证明实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数 $p\leqslant s$，负惯性指数 $q\leqslant t$.

证明 设 $l_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n,i=1,2,\cdots,s+t$. 则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可经适当的非退化线性替换 $Y=CX$,(或 $X=C^{-1}Y$)化成规范形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2,$$

其中 p,q 分别为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正、负惯性指数，$C=(c_{ij})_{n\times n}$ 为可逆实 n 阶矩阵. 于是有

$$l_1^2+\cdots+l_s^2-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+t}^2=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2. \tag{1}$$

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0,\\ c_{p+1,1}x_1+c_{p+1,2}x_2+\cdots+c_{p+1,n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_{n1}x_1+c_{n2}x_2+\cdots+c_{nn}x_n=0.\end{cases} \tag{2}$$

若 $p>s$，则(2)的方程个数 $=s+(n-p)<n$，而 n 等于(2)中未知量的个数，于是齐次线性方程组(2)有非零解$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，代入(1)式，由

$$l_1=l_2=\cdots=l_s=0,y_{p+1}=\cdots=y_n=0,$$

得到

$$-l_{s+1}^2-\cdots-l_{s+t}^2=y_1^2+\cdots+y_p^2,$$

从而

$$y_1=y_2=\cdots=y_p=0.$$

这说明

$$\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

故方程组 $CX=0$ 有非零解，从而 $|C|=0$，这与 $X=CY$ 为非退化线性替换矛盾，所以 $p\leqslant s$.

同理 $q\leqslant t$.

点评 本例的证法是反证法，关键是组成齐次线性方程组(2)的前 s 个方程是由 $l_1=0,l_2=0,\cdots,l_s=0$ 得来的，后 $n-p$ 个方程是由 $y_{p+1}=0,\cdots,y_n=0$ 得来的. 这样的方程组在 $p>s$ 时有非零解$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 利用 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零可以导出 $\boldsymbol{C}$ 为退化矩阵，产生矛盾. 从而证得 $p\leqslant s$.

例 10 判定下列实二次型是否正定：

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3.$$

解 解法 1 因 $f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix},$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=1,1,10$ 全为正实数，故此二次型是正定的.

解法 2 因 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式

$$|2|=2>0,\begin{vmatrix}2&2\\2&5\end{vmatrix}=6>0,\qquad |\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{vmatrix}=10>0,$$

故此二次型是正定的.

例 11 设有 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$，其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$为实数. 试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定二次型？

解 因对于任意实 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$，二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0,$$

故二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定的充要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0,\\x_2+a_2x_3=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n+a_nx_1=0\end{cases}\tag{1}$$

只有零解. 方程组(1)只有零解的充要条件是其系数矩阵的行列式不等于零，即

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0,$$

将 D_n 按第 1 列展开得 $D_n=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$. 故当 $1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时,二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定的.

例 12 证明:对任意正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及任意矩阵 $\boldsymbol{G}$ 恒有秩$(\boldsymbol{G})$=秩$(\boldsymbol{G}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})$.

证明 因 $\boldsymbol{A}$ 正定,必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}$,则秩$(\boldsymbol{G}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})$=秩$(\boldsymbol{G}'\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G})$=秩$[(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G})'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}]$,因秩$[(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G})'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}]$=秩$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G})$,又 $\boldsymbol{Q}$ 可逆,于是秩$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G})$=秩$(\boldsymbol{G})$.

例 13 证明:与反对称矩阵合同的矩阵也是反对称矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵,则 $\boldsymbol{B}'=-\boldsymbol{B}$. 如果 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵,$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}$,则

$$\boldsymbol{D}'=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{D}.$$

$\boldsymbol{D}$ 也是反对称矩阵.

例 14 设 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为非零反对称矩阵,证明:秩$(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$为偶数.

证明 设 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 r,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{F}$,使

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}f_{11} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ f_{r1} & \cdots & f_{rn}\\ 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

因 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}'$ 为反对称矩阵,于是

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{F}_r$ 为 r 级反对称矩阵,且 $|\boldsymbol{F}_r|\neq 0$,由于不存在奇数级可逆反对称矩阵,于是 r 为偶数,故秩$(\boldsymbol{B})$为偶数.

例 15 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 级实对称正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵,证明:$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵的充要条件为秩$(\boldsymbol{B})=n$.

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵,则对任意的实 n 维列向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,有 $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}>0$,即$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})>0$. 于是,$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$. 因此 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,从而秩$(\boldsymbol{B})=n$.

充分性. 因$(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$,故 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵. 若秩

$(\boldsymbol{B})=n$,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,从而对任意实 n 维列向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,有 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,所以对于 $\boldsymbol{BX}\neq\boldsymbol{0}$ 有 $(\boldsymbol{BX})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BX})>0$. 于是当 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}>0$,故 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵.

点评 因 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{AB}$ 为抽象矩阵,判定其正定性,无法由顺序主子式全大于零得到结论. 这类问题一般要从定义(即对应的二次型为正定二次型)和其特征值全大于零这两方面去分析,而求特征值要求知道抽象矩阵满足一定的矩阵关系式,本题无此类条件,故证本题只能用定义法.

例 16 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级实对称矩阵,其特征值全大于常数 a,证明:当 $t\leqslant a$ 时,二次型 $f=X'(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}$ 是正定二次型.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,故必存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

对于任意非零向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$,令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$. 此时,

$$\begin{aligned}f&=\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E})\boldsymbol{PY}=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E})\boldsymbol{PY}\\ &=\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}-t\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{EP})\boldsymbol{Y}\\ &=\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{B}-t\boldsymbol{E})\boldsymbol{Y}\\ &=\boldsymbol{Y}'\begin{pmatrix}\lambda_1-t & & & 0\\ & \lambda_2-t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n-t\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}\\ &=(\lambda_1-t)y_1^2+(\lambda_2-t)y_2^2+\cdots+(\lambda_n-t)y_n^2.\end{aligned}$$

因 $\lambda_i>a(i=1,2,\cdots,n)$,$t\leqslant a$,故 $\lambda_i-t>0$,$(i=1,2,\cdots,n)$,于是 f 正定.

点评 本题是用正定二次型的定义证明的. 若对于任意非零向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$,均有 $f=\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}-t\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}>0$,则 f 正定.

例 17 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为实对称阵,且 $\boldsymbol{B}$ 为正定的,若 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值均大于零,证明:$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

证明 证法 1 因 $\boldsymbol{B}$ 为正定的,故存在正定矩阵 $\boldsymbol{S}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^2$,故 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{BAS}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{SAS}=\boldsymbol{S}'\boldsymbol{AS}$. $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{BAS}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值相同,因而 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{BAS}$ 的特征值全为正的,故 $\boldsymbol{S}'\boldsymbol{AS}$ 的特征值全为正的,因而正定,于是 $\boldsymbol{A}$ 为正定的.

证法 2 因 $\boldsymbol{B}$ 正定,故 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 正定,所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$P'B^{-1}P=E, P'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

故$|\lambda_i E - P'AP| = |\lambda_i P'B^{-1}P - P'AP| = 0$，于是$|\lambda_i B^{-1} - A| = 0$，从而$|\lambda_i E - BA| = 0$. λ_i 为BA 的特征值，而 $\lambda_i > 0$，所以

$$A=(P')^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$$

为正定的.

点评 证法 1 是利用若 B 正定，则存在正定阵 S，使 $B=S^2$，以及相似矩阵有相同的特征值进行证明的；证法 2 是利用若 B 正定，则 B^{-1}正定，且正定矩阵与单位矩阵 E 合同等性质进行证明的.

例 18 设 A，B 均为n 级正定矩阵.证明：AB 的特征值均大于零.

证明 证法 1 因 A 正定，故存在可逆矩阵 P，使 $P'AP=E$，由 B 正定，则$P^{-1}B(P^{-1})'$正定，故有

$$\begin{aligned}P^{-1}B(P^{-1})' &= EP^{-1}B(P^{-1})' = P'APP^{-1}B(P^{-1})' \\ &= P'AB(P')^{-1}.\end{aligned}$$

即 AB 相似于正定阵$P^{-1}B(P^{-1})'$，AB 的特征值均大于零.

证法 2 因 A，B 均正定，故存在正定矩阵 C，D，使 $A=C^2$，$B=D^2$，$AB=C^2D^2$，于是 $C^{-1}ABC=C^{-1}CCDDC=CDDC=(DC)'DC$，即 AB 与$(DC)'DC$相似，而$(DC)'DC$ 正定(C 正定，D 正定，DC 可逆)，故 AB 的特征值均大于零.

证法 3 因 B 正定，故存在正定矩阵 C，使 $B=C^2$，于是

$$AB=AC^2=C^{-1}CACC=C^{-1}C'ACC.$$

即 AB 与$C'AC$ 相似，而 A 正定，所以 $C'AC$ 正定，其特征值均大于零，因相似矩阵有相同的特征值，若 AB 的特征值大于零.

证法 4 设 λ 为AB 的任意特征值，则$|\lambda E-AB|=0$.若 $\lambda=0$，则$|AB|=|A||B|=0$，与 A，B 均为正定阵矛盾，故 $\lambda\neq 0$，若 $\lambda=-k<0$，则$|-kE-AB|=|-A||kA^{-1}+B|=0$，因 A 正定，故$|-A|\neq 0$，于是$|kA^{-1}+B|=0$，而kA^{-1}正定，B 正定，有$(kA^{-1}+B)$正定，于是$|kA^{-1}+B|>0$，与$|kA^{-1}+B|=0$矛盾.故 λ 不能小于零，故 AB 的特征值只能大于零.

证法 5 设 λ 为AB 的任意特征值，X 为AB 的属于λ 的特征向量，则 $ABX=\lambda X$，$BX=\lambda A^{-1}X$，故有 $X'BX=\lambda X'A^{-1}X$.因 A 正定，所以 A^{-1}正定，有

$X'A^{-1}X$ 正定,又 B 正定,故 $X'BX$ 正定,$X'A^{-1}X$ 和 $X'BX$ 均为正实数,故得 $\lambda>0$,所以 AB 的特征值均大于零.

点评 注意 A,B 均为 n 级正定阵,AB 的特征值均大于零,但 AB 不一定是对称阵,故所证明的命题与"若 A,B 均正定,则 AB 正定的充要条件是 $AB=BA$"并不相同.这里只需证明 AB 的特征值均大于零即可.证法 1 的思路是若 A 正定,则 A 与单位矩阵 E 合同,相似矩阵有相同的特征值.证法 2,3 的思路是若 A 正定,则存在正定阵 C,使 $A=C^2$,以及相似矩阵有相同的特征值.证法 4 的思路是,AB 的任意特征值既不能等于零,又不能小于零,故只能大于零.证法 5 的证明思路是,若 A 正定则 A^{-1} 正定.

例 19 设 $A=(a_{ij})_{nn}$,$B=(b_{ij})_{nn}$,$C=(c_{ij})_{nn}$,$c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$,$i,j=1,2,\cdots,n$. 若 A,B 均为正定阵,证明:C 亦正定.

证明 因 B 正定,故存在 n 级可逆阵 M,使 $B=MM'$.

故
$$b_{ij}=m_{i1}m_{j1}+m_{i2}m_{j2}+\cdots+m_{in}m_{jn}=\sum_{k=1}^{n}m_{ik}m_{jk}.$$

$$\begin{aligned}X'CX&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{n}m_{ik}m_{jk}\Big)x_ix_j\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(m_{ik}x_i)(m_{jk}x_j)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_{ik}y_{jk}=\sum_{k=1}^{n}Y_k'AY_k,\end{aligned}$$

其中 $m_{ik}x_i=y_{ik}$,$Y_k=\begin{pmatrix}y_{1k}\\y_{2k}\\\vdots\\y_{nk}\end{pmatrix}$.

当 $X\neq0$ 时,必有某数 $x_l\neq0$,因 $|M|\neq0$,故 M 的第 l 行元素不全为零,因 $m_{lk}x_l=y_{lk}$,存在数 k,使 $y_{lk}\neq0$,即存在 $Y_k\neq0$.故 $X'CX=\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k'AY_k>0$.因此 C 是正定阵.

点评 本题是利用若 B 正定,则存在可逆阵 M 使 $B=MM'$,以及正定矩阵的定义进行证明的.另外用数学归纳法可以证明:若 $(a_{ij})_{nn}$ 是正定的,则 $(a_{ij}^k)_{nn}$ 是正定的.

例 20 证明:下面每个条件都是 n 级实对称矩阵 A 为半正定的充要条件:

1) 存在实方阵 C,使 $A=CC'$;

2) 存在秩为 r 的 $n\times r$ 实矩阵 C,使 $A=CC'$.

证明 必要性.设 A 是半正定的,它的秩为 r,负惯性指数为零,则有实可逆矩阵 P,使

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P', \tag{1}$$

其中 E_r 是 r 级单位矩阵.

1) 由(1)有

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P' = C\cdot C',$$

其中 $C = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) 令 $P=(C,D)$,其中 C 是 P 的前 r 列构成的子块.因 P 可逆,故 C 是秩为 r 的 $n\times r$ 实矩阵,且由(1)有

$$A = (C,D)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix} = CC'.$$

充分性.设 $A=CC'$(C 为实方阵或秩为 r 的 $n\times r$ 实矩阵),则二次型 $f=X'AX$ 即

$$f = X'(CC')X = (X'C)(C'X) = (C'X)'(C'X).$$

令$(C'X)'=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,则

$$f = y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\geqslant 0,$$

即对任意 $X'=(x_1,x_2,\cdots,y_n)\neq 0$,$f$ 的值总是非负实数,故 A 是半正定的.

点评 必要性的证明思路是,若 A 半正定,其秩为 r,负惯性指数为零,则存在实可逆矩阵 P,使

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P'.$$

然后求出 C.充分性的证明思路是,若对任意 $X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$,$f$ 的值总为非负实数,则 A 是半正定的.

例 21 证明 1) 如果 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$是正定二次型,那么

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型;

2) 如果 A 是正定矩阵,那么 $|A|\leqslant a_{nn}P_{n-1}$,这里 P_{n-1}是 A 的 $n-1$ 级的顺序主子式;

3）如果 A 是正定矩阵,那么 $|A|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

4）如果 $T=(t_{ij})$是 n 级实可逆矩阵,那么 $|T|^2=\prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+\cdots+t_{ni}^2)$.

证明 1）设正定二次型 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 的矩阵为对称矩阵 A,则有可逆矩阵 C,使 $C'AC=E$.取

$$T=\begin{pmatrix}C & -A^{-1}Y\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

实际计算知 $T'\begin{pmatrix}A & Y\\ Y' & 0\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}C'AC & 0\\ 0 & -Y'A^{-1}Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & -Y'A^{-1}Y\end{pmatrix}$,两端取行列式得

$$|C|^2f(y_1,\cdots,y_n)=-Y'A^{-1}Y.$$

注意到 $|C|\neq0$, A^{-1}正定,即知 $f(y_1,\cdots,y_n)=-|C|^{-2}Y'A^{-1}Y$ 是负定二次型.

2）$|A|-a_{nn}P_{n-1}=\begin{vmatrix}A_1 & B\\ B_1 & a_{nn}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}A_1 & B\\ 0 & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_1 & B\\ B' & 0\end{vmatrix}$,

由 1）知,对任意 $n-1$ 维向量 B

$$\begin{vmatrix}A_1 & B\\ B' & 0\end{vmatrix}\leqslant0,$$

故 $|A|\leqslant a_{nn}P_{n-1}$.

3）证法 1 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, $|A|=a_{11}$,命题成立.

当 $n=2$ 时,因 A 正定,故

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0,$$

所以 $|A|\leqslant a_{11}a_{22}$,故命题成立.

假设对 $n-1$ 时命题成立,下证对 n 成立.

令 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & \alpha\\ \alpha' & a_{nn}\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}E & -A_{11}^{-1}\alpha\\ 0 & E\end{pmatrix}$,则

$$T'AT=\begin{pmatrix}E & 0\\ -\alpha'A_{11}^{-1} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & \alpha\\ \alpha' & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & -A_{11}^{-1}\alpha\\ 0 & E\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & a_{nn}-\alpha'A_{11}^{-1}\alpha\end{pmatrix},$$

所以 $|A|=\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\alpha' A_{11}^{-1}\alpha \end{vmatrix}=|A_{11}||a_{nn}-\alpha' A_{11}^{-1}\alpha|$.

因 A 正定，故 A_{11} 正定，所以 A_{11}^{-1} 正定，于是 $\alpha' A_{11}^{-1}\alpha\geqslant 0$，所以 $|A|\leqslant a_{nn}|A_{11}|$.

由归纳假设 $|A_{11}|\leqslant a_{11}\cdots a_{n-1,n-1}$，所以 $|A|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证法 2　由于 A 的各级顺序主子式都大于零，与它们位置相应的矩阵都是正定矩阵，故累次应用 2) 的结论，便有 $|A|\leqslant a_{nn}P_{n-1}\leqslant a_{nn}a_{n-1,n-1}P_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant a_{nn}\cdots a_{22}a_{11}$.

4) 首先，$T'T$ 是正定矩阵，这是因为

$$(T'T)'=T'T,(T^{-1})'(T'T)T^{-1}=E.$$

其次，$T'T$ 主对角线上第 i 个元素是

$$t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{ni}^2,$$

故由 3) 的结果

$$|T|^2=|T'T|\leqslant\prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+\cdots+t_{ni}^2).$$

点评　本题的证明思路是：正定矩阵与单位矩阵 E 合同，然后适当的取分块矩阵 T，经矩阵运算，再取行列式便得 1) 的结果，由 1) 易推得 2) 与 3)；在 4) 的证明中主要应用了若 T 实可逆则 $T'T$ 是正定矩阵.

例 22　证明：实对称矩阵 A 是半正定的充要条件是 A 的一切主子式全大于或等于零（所谓 k 级主子式是指形为

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}$$

的 k 级子式，其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$）.

证明　必要性. 令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},A_k=\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix},$$

且它们所对应的二次型分别表为

$$f(x_1,\cdots,x_n),f_1(x_{i_1},\cdots,x_{i_k}).$$

若 $\boldsymbol{A}$ 半正定,则 f 是半正定的,从而 f_1 是半正定的,于是存在实可逆矩阵 $\boldsymbol{C}_k$,使

$$\boldsymbol{C}'_k\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{C}_k=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & \lambda_k\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,k$ 从而 $|\boldsymbol{C}'_k\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{C}_k|=|\boldsymbol{A}_k||\boldsymbol{C}_k|^2=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k\geqslant 0$. 但 $|\boldsymbol{C}_k|^2>0$,故得 $|\boldsymbol{A}_k|\geqslant 0$.

充分性.设 $\boldsymbol{A}$ 的主子式全大于或等于零,任取 $\boldsymbol{A}$ 的第 m 个顺序主子式相应的矩阵

$$\boldsymbol{A}_m=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{pmatrix}, m=1,2,\cdots,n,$$

作
$$|\lambda\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{A}_m|=\begin{vmatrix}\lambda+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & \lambda+a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \lambda+a_{mm}\end{vmatrix}.$$

由行列式性质得

$$|\lambda\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{A}_m|=\lambda^m+P_1\lambda^{m-1}+\cdots+P_{m-1}\lambda+P_m,$$

其中 P_i 是 $\boldsymbol{A}_m$ 中一切 i 级主子式的和,由题设 $\boldsymbol{A}$ 的一切主子式都 $\geqslant 0$,所以 $P_i\geqslant 0$,故当 $\lambda>0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{A}_m|>0$. 即当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,假若 $\boldsymbol{A}$ 不是半正定矩阵,则存在一非零向量 $\boldsymbol{X}'_0=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,使

$$\boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=-c\quad(c>0).$$

于是令

$$\lambda=\frac{c}{\boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{X}_0}=\frac{c}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}>0, \boldsymbol{X}'_0(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}'_0\lambda\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0$$
$$=c-c=0,$$

这与 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 为正定,即 $\boldsymbol{X}'_0(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_0>0$ 矛盾,故 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵.

点评 必要性主要应用若实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是半正定的,则存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$,使

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n\end{pmatrix},$$

其中 $d_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$. 充分性主要应用若 n 级实对称矩阵的顺序主子式全大于零,则 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

例 23 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为正定矩阵. 证明:乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是正定的充要条件为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明 必要性. 因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是正定的,故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是实对称的,设乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是正定的,则 $\boldsymbol{AB}$ 是实对称的:$(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{AB}$. 于是有 $(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{BA}$,故 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

充分性. 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则由上知 $\boldsymbol{AB}$ 是实对称的. 因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为正定的,故存在实可逆方阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}.$$

于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}'=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{QABQ}^{-1}$ 相似. 故两者有相同的特征值. 但

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}'=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}')'(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}')$$

为正定矩阵,其特征值都是正实数,故 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值都是正实数,为正定矩阵.

点评 必要性的证明思路是正定矩阵是实对称的. 充分性证明思路是,相似矩阵有相同的特征值及 $\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正实数.

例 24 证明特征根全是实数的正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必对称.

证明 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实的,故存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{B}$ 为三角矩阵. 设 $\boldsymbol{B}$ 为上三角矩阵(下三角矩阵同理可证),因正交矩阵的乘积仍为正交阵,故 $\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵,上三角正交矩阵必为对角矩阵且主对角线元素为 1 或 -1,则 $\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵,由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{TBT}'$ 可得 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{TBT}'$ 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$.

例 25 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级实对称矩阵,其特征值为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 证明:对任意实 n 维(列)向量 $\boldsymbol{X}$ 均有

$$\lambda_1\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\leqslant\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}\leqslant\lambda_n\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}.$$

证明 证法 1 因 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,故存在正交替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{TY}$(其中 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵),使

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2, \tag{1}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 以及

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y},$$

于是对任意实 n 维向量 $\boldsymbol{X}$,由(1)得

$$\lambda_1\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y}\leqslant\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\leqslant\lambda_n\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y}. \tag{2}$$

又因 T 是正交矩阵，故 $T'T=E$，于是

$$X'X=(TY)'(TY)=Y'T'TY=Y'Y.$$

故由(2)得 $\lambda_1 X'X\leqslant X'AX\leqslant\lambda_n X'X$.

证法 2　因 A 为实对称的，故存在正交矩阵 T 使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

由于 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，于是 $T^{-1}AT-\lambda_1 E=T^{-1}(A-\lambda_1 E)T$ 的特征值为 $0,\lambda_2-\lambda_1,\cdots,\lambda_n-\lambda_1$ 都是非负实数，从而 $A-\lambda_1 E$ 是半正定的.因此对任意实 n 维向量 X 都有

$$X'(A-\lambda_1 E)X\geqslant 0,$$

即
$$\lambda_1 X'X\leqslant X'AX. \tag{1}$$

同理，由于 $\lambda_n E-T^{-1}AT=T^{-1}(\lambda_n E-A)T$ 的特征值为 $\lambda_n-\lambda_1,\cdots,\lambda_n-\lambda_{n-1},0$ 都是非负实数，故 $\lambda_n E-A$ 也是半正定的，故对任意实 n 维向量 X 都有

$$X'(\lambda_n E-A)X\geqslant 0,$$

即
$$X'AX\leqslant\lambda_n X'X. \tag{2}$$

由(1),(2)得　　$\lambda_1 X'X\leqslant X'AX\leqslant\lambda_n X'X$.

点评　证法 1 是利用二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 可通过正交线性替换化为平方和的形式，各平方项的系数为 A 的特征值，以及正交矩阵的定义得证的.证法 2 是利用若 A 的特征值都是非负实数，则 A 是半正定的；以及对任意实 n 维向量 X 都有 $X'AX\geqslant 0$，则 A 是半正定的而得证的.

例 26　设 n 级对称矩阵 $A=(a_{ij})_{nn}$ 是正定的，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是任意 n 个非零实数，证明：$B=(a_{ij}b_ib_j)_{nn}$ 也是正定的.

证明　证法 1　令　$C=\begin{pmatrix}b_1^{-1} & & & \\ & b_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n^{-1}\end{pmatrix}$,

则 $C'BC=A$，因 A 正定，故存在可逆矩阵 T 使 $A=T'T$，所以

$$B=(C^{-1})'T'TC^{-1}=(TC^{-1})'TC^{-1},$$

令 $G=TC^{-1}$，于是 $B=G'G$，G 显然可逆，故 B 正定.

证法 2　因 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$是 n 个不等于零的实数，故 $x_i=b_iy_i(i=1,2,\cdots,n)$是非退化线性替换，令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{XAX'}=\boldsymbol{YBY'}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 正定,故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定二次型,于是 $\boldsymbol{B}$ 是正定的.

证法 3　因 $\boldsymbol{A}$ 正定,故 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式$P_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.设 $\boldsymbol{B}$ 的顺序主子式为 $Q_i(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$Q_i=\begin{vmatrix} a_{11}b_1^2 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1i}b_1b_i \\ a_{12}b_1b_2 & a_{22}b_2^2 & \cdots & a_{2i}b_2b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1i}b_1b_i & a_{2i}b_2b_i & \cdots & a_{ii}b_i^2 \end{vmatrix}$$

$$=b_1^2b_2^2\cdots b_i^2P_i(i=1,2,\cdots,n).$$

因 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为非零实数,故 $Q_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,故 $\boldsymbol{B}$ 正定.

点评　证法 1 的思路是 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T'T}$.证法 2 的思路是合同矩阵有相同的正定性.证法 3 的思路是 n 级实对称矩阵正定的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式大于零.

例 27　设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 级正交矩阵,$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1}$为一组线性无关的列向量,对于 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 都有 $\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{x}_i$,如果 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于 1,证明:$\boldsymbol{A}$ 是单位矩阵.

证明　由题意知 $\boldsymbol{A}$ 至少有 $n-1$ 重特征值 1,又 $|\boldsymbol{A}|=1$,$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=1$,其中 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

不妨设 $\lambda_1=\lambda_2\cdots=\lambda_{n-1}=1$,故 $\lambda_n=1$,即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 重特征值 1,由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实数,故存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使

$$\boldsymbol{T'AT}=\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵.

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T'AT}$,由 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵得$\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵,又 $\boldsymbol{B}$ 为上三角矩阵,故 $\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵,即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{TT'}=\boldsymbol{E}$.

点评　由$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=1$,(其中 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值)得出 $\boldsymbol{A}$ 有 n 重特征值 1,从而存在正交阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T'AT}$ 为上三角矩阵,再由 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵推出$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

例 28　设 $\boldsymbol{A}$ 是n 级实矩阵,证明:存在正交矩阵 $\boldsymbol{G}$,使 $\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{AG}$ 为三角矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根全是实的.

证明　证法 1　为确定起见,这里三角矩阵不妨设为上三角矩阵.

必要性.设有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使

$$T'AT=\begin{pmatrix} c_1 & & & * \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 相似,所以它们有相同的特征值,而 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 的特征值为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 全是实数,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是实数.

充分性.设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的实特征值(要注意的是有些可能为重根).则 $\boldsymbol{A}$ 与某一若当形矩阵$\boldsymbol{J}$ 相似,即存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{P}_0$(因为 λ_i 是实数,那么特征向量是实系数线性方程组的解,从而也是实数),使

$$\boldsymbol{P}_0^{-1}\boldsymbol{AP}_0=\boldsymbol{J}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix}$.而

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{pmatrix}, i=1,2,\cdots,s.$$

因为 λ_i 都是实数,所以 $\boldsymbol{J}$ 为上三角矩阵.

另外,矩阵 $\boldsymbol{P}_0$ 可分解为:

$$\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{T}_0\boldsymbol{S}_0, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{T}_0$ 是正交矩阵,$\boldsymbol{S}_0$ 是上三角矩阵,再将(2)代入(1)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_0^{-1}\boldsymbol{T}_0^{-1}\boldsymbol{AT}_0\boldsymbol{S}_0&=\boldsymbol{J},\\ \boldsymbol{T}_0^{-1}\boldsymbol{AT}_0&=\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{JS}_0^{-1}.\end{aligned} \tag{3}$$

由于 $\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{J},\boldsymbol{S}_0^{-1}$ 都是上三角矩阵,且它们之积也为上三角矩阵,即充分性得证.

证法 2　必要性.设 $\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{AG}$ 为三角矩阵,且主对角线上元素为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=|\boldsymbol{G}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{G}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{AG}|\\&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n),\end{aligned}$$

由于$\boldsymbol{A},\boldsymbol{G}$为实矩阵,则 $\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{AG}$ 也是实矩阵,于是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为实数.

充分性.现对上三角矩阵用归纳法证明.

当 $n=1$ 时,命题显然成立.

假设 $n-1$ 时命题成立,下面看 n 的情况,设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根λ_1,λ_2,

$\cdots,\lambda_n$ 为实数,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是对应于 λ_1 的特征向量,不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为单位向量,把 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 扩充为 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,设在某一标准正交基下 $\boldsymbol{A}$ 所对应的线性变换为 σ,则 σ 在此基下的矩阵为 $\boldsymbol{H}$,即

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix},$$

必存在正交矩阵 $\boldsymbol{M}$,使 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{H}$,由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 具有相同的特征值,因此 $\boldsymbol{D}$ 具有特征值 $\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$. 由归纳法假设存在正交矩阵 $\boldsymbol{G}$ 使

$$\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & & *\\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{Q}'=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}'\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}^{-1}$,又取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}$,则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,且

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{M}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

对下三角形矩阵情况同理可证.

点评 证法 1 必要性的思路是相似矩阵具有相同的特征值,充分性的思路是:设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级实矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则 $\boldsymbol{A}$ 可以分解成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}$.(其中 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵,$\boldsymbol{T}$ 是上三角形矩阵).

证法 2 是用归纳法以及标准正交基进行证明的.

§5.3 习　　题

1. 用非退化线性替换化下列二次型为标准形并利用矩阵验算所得结果:

1) $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

2) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$;

3) $x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;

4) $8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$;

5) $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$;

6) $x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$;

7) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$.

2. 证明:秩等于 r 的对称矩阵可表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

3. 证明：$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$合同，其中$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$是$1,2,\cdots,n$的一个排列.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级矩阵，证明：

1）$\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵当且仅当对任一个 n 维向量 $\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$；

2）如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，且对任一个 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$，那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

5. 如果把实 n 级对称矩阵按合同分类，即两个实 n 级对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，问共有几类？

6. 证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是，它的秩等于 2 和符号差等于 0，或者秩等于 1.

7. 判别下列二次型是否正定：

1）$99x_1^2-12x_1x_2+48x_1x_3+130x_2^2-60x_2x_3+71x_3^2$；

2）$10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$；

3）$\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$；

4）$\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$

8. t 取什么值时，下列二次型是正定的？

1）$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$；

2）$x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

9. 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 的主子式全大于零，所谓主子式就是行指标与列指标相同的子式.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵. 证明：当实数 t 充分大之后，$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

11. 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，那么 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 级实对称矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|<0$，证明：必存在实 n 维向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 使 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<0$.

13. 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 级正定矩阵，证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

14. 证明：二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等.

15. 用非退化线性替换化下列二次型为标准形，并用矩阵验算所得结果：

1）$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$；

2）$\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$；

3) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$,其中 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

16. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$ 是一对称矩阵,且 $|\boldsymbol{A}_{11}|\neq 0$,证明:存在 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & *\end{bmatrix}$,其中 * 表示一级数与 $\boldsymbol{A}_{22}$ 相同的矩阵.

17. 主对角线上全是 1 的上三角矩阵为特殊上三角矩阵.

1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一对称矩阵,$\boldsymbol{T}$ 为特殊上三角矩阵,而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$,证明:$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应顺序主子式有相同的值;

2) 证明:如果对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全不为 0,那么一定有一特殊上三角矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角形;

18. 证明:上三角的正交矩阵必为对角矩阵,且对角线上的元素为 +1 或 −1.

19. 1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 级实矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,证明 $\boldsymbol{A}$ 可以分解成 $\boldsymbol{QT}$:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QT},$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵,$\boldsymbol{T}$ 是一上三角形矩阵:

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn}\end{bmatrix},$$

且 $t_{ii}>0,(i=1,2,\cdots,n)$.并证明这个分解是唯一的;

2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级正定矩阵,证明存在一上三角形矩阵 $\boldsymbol{T}$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}.$$

20. 证明:反对称实数矩阵的特征值是零或纯虚数.

21. 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角形,其中 $\boldsymbol{A}$ 为:

1) $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}-1 & -3 & 3 & -3\\ -3 & -1 & -3 & 3\\ 3 & -3 & -1 & -3\\ -3 & 3 & -3 & -1\end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

22. 用正交线性替换化下列二次型为标准形：

1) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

2) $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$;

3) $2x_1x_2+2x_3x_4$;

4) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+6x_1x_3-4x_1x_4-4x_2x_3+6x_2x_4-2x_3x_4$.

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵,证明:$\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根全大于零.

24. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵,证明:存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式的根全部相同.

25. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,证明存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&1&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&1&&&\\&&&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&0\end{pmatrix}.$$

26. 证明正交矩阵的实特征根为 ±1.

27. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,证明:存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{E}_{n-r}\end{pmatrix}.$$

28. 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根,证明存在 $\mathbf{R}^n$ 中的非零向量 $(\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n})$ 使得

$$f(\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n})=\lambda(\overline{x_1}^2+\overline{x_2}^2+\cdots+\overline{x_n}^2).$$

29. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 $n\times n$ 实对称矩阵,且 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.证明存在一 $n\times n$ 实可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$ 同时为对角形.

30. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级正定矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 n 级单位矩阵,证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的行列式大于 1.

31. 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\quad(a>0),$$

通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

32. 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 均为半正定矩阵,则 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$ 也为半正定矩阵.

33. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级实对称矩阵,$\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 为两个线性无关的 n 维向量,$\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1>0$,$\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2<0$,证明:存在两个与 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 线性相关的 n 维向量 $\boldsymbol{X}_3$,

X_4,而 X_3,X_4 线性无关,且 $X_3'AX_3=X_4'AX_4=0$.

34. 设 A 为 n 级实对称矩阵,B 为 n 级实矩阵,证明:如果 $AB'+BA'$ 的特征值全为正实数,则 $|A|\neq 0$.

35. 设 A,B 都是正交矩阵,若 $|A|+|B|=0$,证明:$A+B$ 不是可逆矩阵.

36. 设 A 为 n 级实正定矩阵,证明:对于任意给定的正整数 m,都存在唯一的一个实正定阵 B,使 $B^m=A$.

37. 设 a,b 分别为实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 特征多项式的根的最小值与最大值,证明:

$$na\leqslant \mathrm{Tr}A\leqslant nb,$$

这里 $\mathrm{Tr}A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

38. 设 A,C 是 n 级正定矩阵. 已知 B 是矩阵方程:$AX+XA'=C$ 的唯一解,求证:

(1) B 是实对称矩阵; (2) B 是正定的.

39. 设 B 是实可逆反对称矩阵,证明 B^2+B^{-1} 可逆,且 $A=(B^2-B^{-1})(B^2+B^{-1})^{-1}$ 是正交矩阵.

§5.4 习题答案与提示

1. 1) $-4y_1^2+4y_2^2+y_3^2$. 2) $y_1^2+y_2^2$.

3) $y_1^2-y_2^2$. 4) $8y_1^2+2y_2^2-2y_3^2-8y_4^2$. 5) $6y_1^2-y_2^2-2y_3^2-y_4^2$.

6) $y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$. 7) $y_1^2+y_2^2+2y_3^2-2y_4^2$.

5. $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

7. 1) 是. 2) 不是. 3) 是. 4) 是.

8. 1) $-\frac{4}{5}<t<0$. 2) 不论 t 取何值,所得二次型都不正定.

15. 提示:1) 作替换

$$\begin{cases}x_{2k-1}+x_{2k+1}=y_{2k-1},\\ x_{2k}=y_{2k}\end{cases}\quad k=1,2,3,\cdots,$$

再对 n 分奇、偶进行讨论,并规定,若 $l>n$,$x_l=y_l=0$.

2) 提示:将形如

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{2}{k}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\quad (k\text{ 为正整数})$$

的二次型记为 $f(n,k)$,则原二次型为 $f(n,2)$. 首先证明恒等式:

$$f(n,k)=\left(x_n+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^2+\left(1-\frac{1}{k^2}\right)f(n-1,k+1),k\geqslant 2,$$

然后对 n 作归纳法，将 $f(n,2)$化为标准型.

3) 作替换

$$\begin{cases}y_1=x_1-\overline{x},\\ y_2=x_2-\overline{x},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_{n-1}=x_{n-1}-\overline{x},\\ y_n=x_n.\end{cases}$$

注意 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=0$，因而原二次型化为

$$\begin{aligned}&y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2+(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})^2\\ =&2\left(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}y_iy_j\right),\end{aligned}$$

归纳为本题的 2).

答案：1) 当 n 为偶数，即 $n=2k$ 时为 $y_1^2-y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2-y_n^2$；当 n 为奇数，即 $n=2k+1$ 时为 $y_1^2-y_2^2+\cdots+y_{n-2}^2-y_{n-1}^2$.

2) $y_1^2+\frac{3}{4}y_2^2+\frac{4}{6}y_3^2+\cdots+\frac{n+1}{2n}y_n^2$.

3) $2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2+\frac{4}{3}y_3^2+\cdots+\frac{n}{n-1}y_n^2$.

19. 1) 提示：将 $\boldsymbol{A}$ 的列向量进行正交化和单位化相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘一些上三角矩阵，对角线上元素都大于零. 唯一性可由 18 题导出.

2) 提示：将 $\boldsymbol{A}$ 看成欧氏空间的内积在一组基下的度量矩阵，再将这基标准正交化，其过渡矩阵是上三角形，记作 $\boldsymbol{T}_1$. 于是 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{T}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1$. 另一种方法是，$\boldsymbol{A}$ 合同于单位矩阵因而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}$ 根据 1) $\boldsymbol{P}$ 可化成 $\boldsymbol{QT}$，于是即得结论.

21. 1) $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.　　2) $\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&-\frac{2}{3}\\ 0&\frac{5}{3\sqrt5}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

22. 答 1) 正交线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

标准型为 $-y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$.

2) 正交线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}\sqrt{5}y_1 + \frac{2\sqrt{5}}{15}y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}y_1 + \frac{4\sqrt{5}}{15}y_2 - \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = \frac{\sqrt{5}}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

标准型为 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$.

3) 正交线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_4, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_4, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3. \end{cases}$$

标准型为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$.

4) 正交线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4, \\ x_4 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4. \end{cases}$$

标准型为 $y_1^2 - 3y_2^2 - y_3^2 + 7y_4^2$.

26. 提示:将$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$应用于特征向量 $\boldsymbol{x}$.

28. 提示:仿例题 25,利用上述标准型进行讨论.

29. 提示:将 $\boldsymbol{B}$ 看作欧氏空间在某组基下的度量矩阵.

30. 提示:正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零,$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \cdots, \lambda_n + 1$ 全大于 1.

31. $a = 2$,正交替换矩阵为 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,原二次型化为 $y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$.

32. 提示:利用 n 级矩阵$\boldsymbol{A}$ 半正定,则存在 n 级方阵$\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QQ}'$或用数学归纳法证明.

33. 提示:利用当判别式>0 时,实系数一元二次方程有两个不同的实数解.

34. 提示:证明 $\boldsymbol{A}$ 无特征值 0.

35. 提示:利用正交矩阵的定义和性质证明.

36. 提示:先找出 $\boldsymbol{B}$,然后再证唯一性.

37. 提示:易知 $b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 半正定,即 $\boldsymbol{X}'(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\geqslant 0$,从而推得 $Tr\boldsymbol{A}\leqslant nb$,同理可证:$na\leqslant \mathrm{Tr}A$.

38. 提示:证 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于零.

39. 提示:用反证法证 $\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}^{-1}$ 可逆,用定义证 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

第六章　线 性 空 间

§6.1　基 本 知 识

一、线性空间的定义及其性质

1. 线性空间的定义

令 P 是一个数域，V 是一个非空集合，在集合 V 的元素之间定义了一个代数运算，叫做加法，即对 $\forall\, \alpha,\beta\in V, \alpha+\beta\in V$. 在数域 P 和 V 的元素之间还定义了一种运算，叫做数量乘法，即对 $\forall\, \alpha\in V, \forall\, k\in P, k\alpha\in V$，且满足

1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$;

2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$;

3) 在 V 中有一个元素 $\mathbf{0}$，叫做 V 的零元，对 $\forall\, \boldsymbol{\alpha}\in V$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

4) 对 V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$，$\exists\, \boldsymbol{\beta}\in V$（叫做 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元），使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$（且记 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$）;

5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\in V$;

6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\in V, k,l\in P$;

7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\in V, k,l\in P$;

8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V, k\in P$,

则称 V 是数域 P 上的线性空间.

2. 线性空间 V 的性质

1) V 中零元唯一;

2) V 中每个元的负元唯一;

3) $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}, k\mathbf{0}=\mathbf{0}, (-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$;

4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$ 记作 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$;

5) 由 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 可推出 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

6) V 中向量的线性相关，线性无关，线性组合，线性表示，极大线性无关组，向量组的秩等概念均与 P^n 中所定义的相同.

二、线性空间的基、维数和坐标

1．设 V 是数域 P 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in V$，若有

1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

2）$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V 的一组基，并称 V 是 n 维线性空间．若 V 中不存在满足条件 1)和 2)的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，称 V 是无限维线性空间．

若 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基，设 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$，$k_i\in P$，$i=1,2,\cdots,n$，称 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)'$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 表示的坐标．

2．n 维线性空间 V 的任意 n 个线性无关的向量都是 V 的基．

3．n 维线性空间 V 的任意 r 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 都可以扩充为 V 的一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,$$

但 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 不唯一．

4．过渡矩阵

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，对 $\forall\boldsymbol{\beta}\in V$，

$$\text{设 }\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},$$

即将 $\boldsymbol{\alpha}$ 形式的写成二个矩阵相乘，坐标$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一确定．若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\in V$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 用基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 表示为：

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{23}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{ns}\end{pmatrix}.$$

令
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{23}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{ns}\end{pmatrix},$$

若 $s=n$，并且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 也是 V 的一组基，则称 $\boldsymbol{A}$ 是由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵．由于 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,$

$\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

5. 向量在不同基下坐标之间的关系

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维线性空间 V 的两组基，且 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$，对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，若有 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 在二组不同基下的坐标之间的关系由一组基到另一组基的过渡矩阵来确定.

三、子空间及其交与和

1. 子空间的定义

设 V 是数域 P 上的线性空间，W 是 V 的非空子集，若 W 关于 V 的加法和数量乘法也做成 P 上的线性空间，称 W 是 V 的子空间.

2. 子空间的判别

设 W 是线性空间 V 的非空子集，则 W 是 V 的子空间当且仅当下列两个条件同时成立：

$\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$;

$\forall\,k\in P,\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in W,k\boldsymbol{\alpha}\in W$.

3. 生成子空间

V 是数域 P 上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in V$，令 $W=\left\{\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\,\middle|\,k_i\in P\right\}$，易知，$W$ 是 V 的子空间，并且 W 是含 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的最小子空间，称此子空间是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间，记作 $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组为 W 的一组基. 而且 W 的维数等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩.

4. 子空间的相等

V 的两个子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k)$ 当且仅当两向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$ 等价.

5. 子空间的交

设 $V_1,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的 s 个子空间，$\bigcap\limits_{i=1}^{s} V_i=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_i,i=1,\cdots,s\}$是子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 的交，它也是 V 的一个子空间．特别地，当 $s=2$ 时，记作 $V_1\cap V_2$．

6．子空间的和

设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的 s 个子空间，子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 的和是：

$$V_1+V_2+\cdots+V_s=\{\alpha_1+\cdots+\alpha_s\mid\alpha_i\in V_i\}.$$

它也是 V 的一个子空间．

若 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$，$V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$，则

$$V_1+V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t),$$

且维$(V_1+V_2)\leqslant$维$(V_1)+$维(V_2)．

7．维数公式

设 V 是数域P 上的 n 维线性空间，V_1,V_2 是 V 的两个有限维子空间，则

$$\text{维}(V_1+V_2)+\text{维}(V_1\cap V_2)=\text{维}(V_1)+\text{维}(V_2).$$

四、子空间的直和

1．直和的定义

设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的 s 个子空间，若和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 中的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{s}\boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\alpha}_i\in V_i)$的分解唯一，称和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 为直和，记作 $V_1\dotplus V_2\dotplus\cdots\dotplus V_s$．

2．直和的判别

1) $\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$ 是直和；

2) $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$，$\boldsymbol{\alpha}$ 分解唯一；

3) 零向量分解唯一；

4) $V_i\cap\sum\limits_{j\neq i}V_j=\{0\}$；

5) 维$\left(\sum\limits_{i=1}^{s}V_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{s}$维$(V_i)$；

6) 所有 $V_i(i=1,\cdots,s)$的基的联合是 $\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$ 的基；

7) $V_i\cap\sum\limits_{j=1}^{i-1}V_j=\{0\}$，$i=1,2,\cdots,s$．

3. 余子空间

设 U 是数域 P 上线性空间 V 的子空间，若存在 V 的子空间 W，使 $V=U\dotplus W$，称 W 是 U 在 V 中的余子空间.

若 V 是有限维线性空间，则它的每一个子空间都有余子空间，但余子空间一般不唯一. 例如，在几何空间中，设 U 是过原点的一个平面，任意一条经过原点但不在 U 上的直线都是 U 的一个余子空间.

五、线性空间的同构

1. 线性空间同构的定义

设 V 和 W 都是数域 P 上的两个线性空间，若存在 V 到 W 的一一映射（双射）σ，使

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta});$$
$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$$

其中 $k\in P,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，则称 σ 是线性空间 V 到线性空间 W 的同构映射. 记作 $V\cong W$（或 $V\overset{\sigma}{\cong}W$）.

特别地，当 $V=W$ 时，也说 σ 是线性空间 V 的自同构.

2. 同构的性质

设 V 和 W 是数域 P 上的线性空间，σ 是 V 到 W 的同构映射，则

1) $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}$;

2) $\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha})$;

3) $\sigma\left(\sum_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{s}k_i\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i),\boldsymbol{\alpha}_i\in V,k_i\in P$.

4) 对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\in V$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 和向量组 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_t)$ 有完全相同的线性关系；

5) 维(V)=维(W);

6) 若 σ 可逆，$\sigma^{-1}:W\to V,\boldsymbol{\beta}\mapsto\boldsymbol{\alpha}$，当 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$，则 σ^{-1} 是 W 到 V 的同构映射；

7) 若维$(V)=n$，则 $V\cong P^n$.

§6.2 例　　题

例 1　设 P,K 是两个数域，$P\subseteq K$，关于数的加法和数的乘法，K 构成 P 上线性空间. 如复数域 $\mathbf{C}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 2 维线性空间，它的一组基是 $1,\mathrm{i}$，而 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{R}$ 都是有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的无限维线性空间. 特别地，P 是 P 上的 1 维线性空间.

但当 $P \not\subseteq K$ 时，P 不是 K 上的线性空间.

例 2 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$

设 $V = \{f(A) \mid f(x) \in \mathbf{R}[x], \mathbf{R}$ 是实数域$\}$，证明：

1) V 关于矩阵的加法和数与矩阵的乘法构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

2) 维$(V)=3$.

1) **证明** 由 $A \in V$，则 $V \neq \varnothing$，而 $V \subseteq \mathbf{R}^{3\times 3}$.

设 $f(A), g(A) \in V$，其中 $f(x), g(x) \in \mathbf{R}[x]$，对 $\forall k \in \mathbf{R}$，$f(x)+g(x)$，$kf(x) \in \mathbf{R}[x]$，因此，$f(A)+g(A)$，$kf(A) \in V$，故 V 是 $\mathbf{R}^{3\times 3}$ 的一个子空间，即 V 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

2) **解** 由 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，因而 $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，$\omega^3 = 1$，即有

$$\omega^n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = 3k, \\ \omega, & \text{当 } n = 3k+1, \\ \omega^2, & \text{当 } n = 3k+2, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

于是

$$A^n = \begin{cases} E, & \text{当 } n = 3k, \\ A, & \text{当 } n = 3k+1, \\ A^2, & \text{当 } n = 3k+2, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

故对 $\forall f(A) \in V$，$f(A)$ 可表示为 E, A, A^2 的线性组合. 下证 E, A, A^2 线性无关.

设 $x_1 E + x_2 A + x_3 A^2 = \mathbf{0}$，则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \omega^2 x_1 + \omega x_2 + x_3 = 0, \\ \omega x_1 + \omega^2 x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega^2 & \omega & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 3(\omega - \omega^2) \neq 0$，得 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$，即 E, A, A^2 线性无关，故维$(V)=3$.

例 3 设 P 为数域，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in P^{3\times 3}$. 求 $P^{3\times 3}$ 中所有与 A 可交换的

矩阵所构成的线性空间 **V** 的维数和一组基.

解 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则有

$$\begin{cases} a_3=b_3=0, \\ c_1=3c_3-3a_1-b_1, \\ c_2=c_3-3a_2-b_2, \end{cases}$$

即 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 3c_1-3a_1-b_1 & c_3-3a_2-b_2 & c_3 \end{pmatrix}$,于是,V 的一组基为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

故维$(V)=5$.

例 4 设 P 为数域,在 P^4 中,设

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-1,1)$,$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,0,1)$,$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1,0)$,求 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$和 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$的维数和一组基.

解 由于 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$,因此,只需求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的极大无关组即可.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{只进行行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其极大无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$,或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$,或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$.它们都是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$的基,因而 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$的维数为 3.

下面求 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$的基和维数.

首先,给出 P^4 的一组基:

$$\begin{cases} \varepsilon_1=(1,0,0,0), \\ \varepsilon_2=(0,1,0,0), \\ \varepsilon_3=(0,0,1,0), \\ \varepsilon_4=(0,0,0,1). \end{cases}$$

而$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{A}$,其中,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&0&1&2&1\\0&0&-1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

对$\forall\ \boldsymbol{\alpha}\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，设$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2$，则

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3-y_1\boldsymbol{\beta}_1-y_2\boldsymbol{\beta}_2\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\-y_1\\-y_2\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\-y_1\\-y_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故有 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\-y_1\\-y_2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$，解此方程组得基础解系：$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$. 因此，$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$的维数为2，它的一组基是

$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\ 或\ -2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$

点评 求$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\cap L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$的基和维数，就是求方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3',\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2')\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\-y_1\\-y_2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

的基础解系，基础解系所含解的个数是交的维数，基础解系的每个解向量的前3个分量x_1,x_2,x_3与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$做线性组合(或后两个分量$-y_1,-y_2$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$做线性组合)，便可得到交的一组基.

例5 设P为数域，在$P^{2\times2}$中，令

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x & -x\\ y & z\end{pmatrix}\middle| x,y,z\in P\right\},V_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -a & c\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in P\right\}.$$

1）证明 V_1 和 V_2 均为 $P^{2\times 2}$ 的子空间；

2）求 V_1+V_2 和 $V_1\cap V_2$ 的维数和一组基.

1）**证明** 显然 V_1 和 V_2 对加法和数乘都是封闭的，故 V_1 和 V_2 都是 $P^{2\times 2}$ 的子空间.

2）**解** 解法 1

易知，维$(V_1)=3$，其一组基是 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，维$(V_2)=3$，其一组基是 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，即

$$V_1=L\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right),V_2=L\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

于是，维$(V_1)+$维$(V_2)=6$.

$$V_1+V_2=L\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right).$$

由于 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 是 V_1+V_2 的一组基，于是

$$V_1+V_2=L\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right).$$

因而，维$(V_1+V_2)=4$.

由维数公式，维$(V_1\cap V_2)=2$. 设 $\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\in V_1\cap V_2$，则有 $a_{12}=-a_{11}=a_{21}$，因而 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in V_1\cap V_2$，由于 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 线性无关，故 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基，即

$$V_1\cap V_2=L\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

解法 2 用(x_1,x_2,x_3,x_4)代替 $\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，由上例的解法，给出线性方程组

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=0.$$

解得基础解系为：

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

故维$(V_1\cap V_2)=2$，且 $V_1\cap V_2$ 的基是

$$\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix},-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

或

$$-\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

由维数公式知，维$(V_1+V_2)=4$. 由 V_1 和 V_2 的元素形式，不难看出，

$$\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是 V_1+V_2 的一组基.

点评 由于子空间和的维数和基较易求出，因此在解法 1 中，首先确定和的维数和维数的和，再利用维数公式，确定交的维数，利用交的元素的形式，确定交的基. 解法 2 是利用通常求和与交的维数及基的方法求出. 由此，当子空间的元素的形式给出之后，解法 1 较解法 2 就显得更为简单些.

例 6 设 P 为数域，在 P^4 中，令

$$W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1-2x_2+2x_4=0,x_1+2x_3=0\},$$

$$W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1-4x_2-2x_3+4x_4=0\}.$$

求 $W_1\cap W_2$ 与 W_1+W_2 的维数和一组基.

解 解法 1 对于 $W_1\cap W_2$，解方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+2x_4=0,\\x_1+2x_3=0,\\x_1-4x_2-2x_3+4x_4=0,\end{cases}$$

得基础解系$(-2,-1,1,0)$，$(0,1,0,1)$. 因此，维$(W_1\cap W_2)=2$，且$(-2,-1,1,0)$，$(0,1,0,1)$为 $W_1\cap W_2$ 的一组基.

对于 W_1+W_2，由于 W_1 是方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+2x_4=0,\\x_1+2x_3=0\end{cases}$的解空间，因而，维$(W_1)=2$. 同理可知，维$(W_2)=3$. 由维数公式，维$(W_1+W_2)=3$.

由于$(-2,-1,1,0)$，$(0,1,0,1)\in W_1+W_2$，不妨再取 W_2 的一个向量(2,

0,1,0). 由于$(-2,-1,1,0),(0,1,0,1),(2,0,1,0)$线性无关,即为 W_1+W_2 的一组基.

解法 2　对于 W_1 和 W_2,分别解方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2\qquad\qquad +2x_4=0,\\ x_1\qquad\quad +2x_3\qquad\quad =0\end{cases}\text{和}\quad x_1-4x_2-2x_3+4x_4=0$$

得

$$\text{维}(W_1)=2,\text{其基为}(-2,-1,1,0),(0,1,0,1),$$

$$\text{维}(W_2)=3,\text{其基为}(4,1,0,0),(2,0,1,0),(-4,0,0,1).$$

将 W_1 和 W_2 的基联合,求出一组极大无关组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,-1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,1,0),$$

故维$(W_1+W_2)=3$,且基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

对于 $W_1\cap W_2$,解方程组

$$\begin{pmatrix}-2&0&4&2&-4\\-1&1&1&0&0\\1&0&0&1&0\\0&1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=0$$

得基础解系$(-1,0,-1,1,0),(0,-1,1,0,1)$. 故维$(W_1\cap W_2)=2$,且$(2,1,-1,0),(0,-1,0,-1)$为其一组基.

点评　解法 1 利用维数公式求解. 解法 2 是利用 W_1 和 W_2 的基联合求解. 这两种方法是解决此类问题的最基本的方法.

例 7　设 V 是数域 P 上的线性空间,证明不存在 V 的五个子空间 V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,使下列四个条件同时成立:

1) V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,两两不同;

2) 任意两个子空间的和与交仍属于这五个子空间;

3) $V_1\subseteq V_2\subseteq V_3\subseteq V_5,V_1\subseteq V_4\subseteq V_5$;

4) V_2 与 V_4 和 V_3 与 V_4 之间没有包含关系.

证明　(反证法)假设存在满足题设中四个条件的五个子空间 V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,由条件 3)

$$V_2+V_4\subset V_3+V_4.$$

由条件 4)

$$V_4\subsetneq V_2+V_4,V_4\subsetneq V_3+V_4.$$

由条件 2)和 3)

$$V_2+V_4=V_3+V_5=V_5,$$

因而

$$维(V_2)+维(V_4)-维(V_2\cap V_4)=维(V_3)+维(V_4)-维(V_3\cap V_4).$$

由条件 4)

$$V_2\cap V_4\subsetneq V_2,V_2\cap V_4\subsetneq V_4,$$
$$V_3\cap V_4\subsetneq V_2,V_3\cap V_4\subsetneq V_4.$$

由条件 2)

$$V_2\cap V_4=V_3\cap V_4=V_1,$$

因此 $$维(V_2)=维(V_3).$$

由条件 3),

$$V_2=V_3,$$

与条件 1)矛盾,故满足题设条件的五个子空间不存在.

例 8 设 V_1,V_2是线性空间 V 的两个子空间,证明 $V_1\cup V_2$是 V 的子空间的充分条件是 $V_1\subseteq V_2$或 $V_2\subseteq V_1$.

证明 ⇒显然.

证法 1 设 $V_1\cup V_2$是 V 的子空间,且 $V_1\subsetneq V_2$,$V_2\subsetneq V_1$,则存在 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1$,$\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$,也存在 $\boldsymbol{\beta}\in V_2$,$\boldsymbol{\beta}\notin V_1$.由于 $V_1\cup V_2$是 V 的子空间,因而 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1\cup V_2$,于是有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1$,或 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_2$,故有 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$或 $\boldsymbol{\alpha}\in V_2$与 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$且 $\boldsymbol{\beta}\notin V_1$矛盾,因此 $V_1\subseteq V_2$或 $V_2\subseteq V_1$.

证法 2 设 $V_1\subsetneq V_2$,则存在 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1$,$\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$,对 $\forall\boldsymbol{\beta}\in V_2$,由于 $V_1\cup V_2$是 V 的子空间,因而 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1\cup V_2$,由 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$ 且 $\boldsymbol{\beta}\in V_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_2$.因此 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1$,继而有 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$,即 $V_2\subseteq V_1$.

点评 证明此种类型的问题,证法 1 和证法 2 是最基本的两种方法,希望能通过这一例题熟练掌握其证明的基本思路.

例 9 设 V_1,V_2是数域 P 上线性空间 V 的两个非平凡子空间,证明,V 中存在向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\alpha}\notin V_1$,$\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$.

证法 1 由 V_1是 V 的非平凡子空间,故存在 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\alpha}\notin V_1$,若 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$,则结论成立.

若 $\boldsymbol{\alpha}\in V_2$,由 V_2的非平凡性,存在 $\boldsymbol{\beta}\notin V_2$,若 $\boldsymbol{\beta}\notin V_1$,则结论也成立.

若 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$,下证 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_2$,$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_1$.

若 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1$,由 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$,则 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1$,与 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_1$矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_1$,同理 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_2$.

证法 2 假设对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$,有 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1$,或 $\boldsymbol{\alpha}\in V_2$,则 $V_1\cup V_2=V$,即 $V_1\cup$

V_2是 V 的子空间，由例 8，$V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$，从而可得 $V_1 = V$ 或 $V_2 = V$ 与题设条件矛盾，故必存在向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使 $\boldsymbol{\alpha} \notin V_1, \boldsymbol{\alpha} \notin V_2$.

点评　证法 1 是我们最容易想到的证明方法. 证法 2 借助于例 8 的结论，证起来较简单，但不能像证法 1 那样将不在 V_1，也不在 V_2 中的元素找出来.

例 10　设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡子空间，证明 V 中至少存在向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使 $\boldsymbol{\alpha} \notin V_i, i = 1,2,\cdots,s$.

证明　对 s 用数学归纳法.

当 $s = 2$ 时，由例 9，结论正确.

假设对 $s-1$ 个非平凡子空间的情况，结论正确.

我们对 s 个非平凡子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 的情况进行证明. 由归纳假设，$\exists\, \boldsymbol{\alpha} \notin V_i, i = 1,2,\cdots,s-1$.

若 $\boldsymbol{\alpha} \notin V_s$，则结论成立.

若 $\boldsymbol{\alpha} \in V_s$，由 V_s 非平凡，故 $\exists\, \boldsymbol{\beta} \notin V_s$，于是对 $\forall k \in P, k\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_s$. 取 $k_1, k_2 \in P, k_1 \neq k_2$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, k_2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ 不属于同一个 $V_i, i = 1,2,\cdots,s-1$，否则，若 $\exists\, V_k, 1 \leqslant k \leqslant s-1$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} - k_2\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = (k_1 - k_2)\boldsymbol{\alpha} \in V_k$，由于 $k_1 - k_2 \neq 0$，因而 $\boldsymbol{\alpha} \in V_k$ 矛盾.

在 P 中，取 s 个互不相同的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，由上述证明知在向量组 $k_1\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, k_2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \cdots, k_s\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ 中，$\exists\, j (1 \leqslant j \leqslant s)$ 使 $k_j\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ 不属于 $V_1, V_2, \cdots, V_{s-1}$ 中的任何一个，而 $k_j\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_s$（否则 $\boldsymbol{\beta} \in V_s$ 矛盾），即有 $k_j\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ 不属于 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 中的任何一个.

例 11　设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，V 中有 s 组向量，且每一组都含有 t 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\beta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{it}, i = 1,2,\cdots,s, t < n$，证明 V 中必存在 $n-t$ 个向量，它们与每一组的 t 个线性无关向量的联合构成 V 的一组基.

证明　令 $V_i = L(\boldsymbol{\beta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{it}), i = 1,2,\cdots,s$，因为 $t < n$，所以 V_i 是 V 的非平凡子空间，$i = 1,2,\cdots,s$，由例 10，存在 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V$，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不属于 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 中的任何一个. 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{it}$，线性无关. $i = 1,2,\cdots,s$，

若 $t+1 < n$，令 $W_i = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{it})$，$W_i$ 也是 V 的非平凡子空间，$i = 1,2,\cdots,s$. 同理，存在 $\boldsymbol{\alpha}_2 \in V$，使 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{it}$ 线性无关，$i = 1,2,\cdots,s$.

如此继续下去，可得到 V 的 $n-t$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-t}$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-t}, \boldsymbol{\beta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{it}$ 为 V 的一组基，$i = 1,2,\cdots,s$.

例 12　设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的非平凡子空间，证明存在 V 的一组基，使基中的每一个向量均不存在 V_i 中，$i = 1,2,\cdots,s$.

证明　对 s 用数学归纳法.

当 $s=1$ 时,由 V_1 非平凡,设维$(V_1)=r(r<n)$,令 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V_1 的一组基,并将其扩充为 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 令 $\boldsymbol{\varepsilon}'_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_n,i=1,\cdots,r$,由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_n\notin V_1$,因而 $\boldsymbol{\varepsilon}'_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_n\notin V_1$,容易证明 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一个基,且此基中的每一个向量均不在 V_1 中.

设子空间的个数为 $s-1$ 时结论成立,下面对子空间的个数为 s 时证明结论也成立.

由归纳假设,存在 V 的一组基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,使对每一个 $\boldsymbol{\beta}_i,i=1,\cdots,n$,有 $\boldsymbol{\beta}_i\notin V_j,j=1,\cdots,s-1$. 由 V_s 是非平凡的,故存在 $\boldsymbol{\beta}_k\notin V_s$,不妨设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\in V_s$,而 $\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\notin V_s(r<n)$,而 $\boldsymbol{\beta}_1+m\boldsymbol{\beta}_n,(m=1,2,\cdots)$ 中不能有两个同时属于 $V_1,V_2,\cdots,V_{s-1}$ 中的某一个.(若有 $\boldsymbol{\beta}_1+m_1\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta}_1+m_2\boldsymbol{\beta}_n\in$ 某一个 V_l,$m_1\neq m_2$,则必有 $\boldsymbol{\beta}_n\in V_l$ 矛盾),因而,可取 m_1 使 $\boldsymbol{\beta}_1+m_1\boldsymbol{\beta}_n$ 不属于所有的 V_j,$1\leqslant j\leqslant s-1$.

同理 $\exists\, m_2,m_3,\cdots,m_r$,使 $\boldsymbol{\beta}_2+m_2\boldsymbol{\beta}_n,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r+m_r\boldsymbol{\beta}_n$ 不属于所有的 V_j,$1\leqslant j\leqslant s-1$. 于是 $\boldsymbol{\beta}_1+m_1\boldsymbol{\beta}_n,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r+m_r\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 就为所求的 V 的一组基.

例 13 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in P^{n\times s}$,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\in V$,且满足 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$. 证明:$L=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$ 的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

证法 1 设 $\boldsymbol{A}_k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 列,则 $\boldsymbol{\beta}_k=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_k$. 设 $\boldsymbol{\beta}_{j1},\boldsymbol{\beta}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jt}$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 中的任意 t 个向量,则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t}x_{ji}\boldsymbol{\beta}_{ji}=\boldsymbol{0}&\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{t}x_{ji}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_{ji}=\boldsymbol{0}\\&\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{t}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)x_{ji}\boldsymbol{A}_{ji}=\boldsymbol{0}\\&\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{t}x_{ji}\boldsymbol{A}_{ji}=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

于是知,$\boldsymbol{\beta}_{j1},\boldsymbol{\beta}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jt}$ 与其所对应的 t 个列向量 $\boldsymbol{A}_{ji},\boldsymbol{A}_{j2},\cdots,\boldsymbol{A}_{jt}$ 有完全相同的线性关系. 故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 与 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 有相同的秩,即 $L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$ 的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

证法 2 设 $L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$ 的秩 $=r$,且 $\boldsymbol{\beta}_{j1},\boldsymbol{\beta}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jr}$ 为其基.

对于 $\boldsymbol{\beta}_{j1},\boldsymbol{\beta}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jr}$ 所对应的 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个列为 $\boldsymbol{A}_{j1},\boldsymbol{A}_{j2},\cdots,\boldsymbol{A}_{jr}$,设 $\sum\limits_{k=1}^{r}x_{jk}\boldsymbol{A}_{jk}=\boldsymbol{0}$,则有

$$\sum_{k=1}^{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)x_{jk}\boldsymbol{A}_{jk}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\sum_{k=1}^{r} x_{jk}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_{jk} = \boldsymbol{0},\text{所以}\sum_{k=1}^{r} x_{jk}\boldsymbol{\beta}_{jk} = \boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{\beta}_{j1},\boldsymbol{\beta}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jr}$ 线性无关,故 $x_{jk}=0,k=1,\cdots,r$,因此,$\boldsymbol{A}_{ji},\boldsymbol{A}_{j2},\cdots,\boldsymbol{A}_{jr}$ 线性无关.

对 $i = 1,\cdots,s$,设 $\boldsymbol{\beta}_i = \sum_{l=1}^{r} a_{jl}\boldsymbol{\beta}_{jl}$,于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{\beta}_i = \sum_{l=1}^{r} a_{jl}\boldsymbol{\beta}_{jl} &= \sum_{l=1}^{r} a_{jl}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_{jl}\\ &= \sum_{l=1}^{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)a_{jl}\boldsymbol{A}_{jl}\\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\sum_{l=1}^{r} a_{jl}\boldsymbol{A}_{jl},\end{aligned}$$

故有 $\boldsymbol{A}_{ji} = \sum_{l=1}^{r} a_{jl}\boldsymbol{A}_{jl}, i = 1,\cdots,s$.因此 $\boldsymbol{A}_{ji},\boldsymbol{A}_{j2},\cdots,\boldsymbol{A}_{jr}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组一个极大线性无关组,即 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $= r$,也就是说 $L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

证法 3　令 $\varphi: V\to P^n, \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的基,故 φ 是 V 到 P^n 的双射.易证

$$\forall\, \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V, \varphi(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \varphi(\boldsymbol{\alpha})+\varphi(\boldsymbol{\beta}),$$
$$\forall\, k\in P, \forall\, \boldsymbol{\alpha}\in V, \varphi(k\boldsymbol{\alpha}) = k\varphi(\boldsymbol{\alpha}),$$

因此 $V \overset{\varphi}{\cong} P^n$,于是,$V$ 中任意向量组与 P^n 中对应的向量组有相同的线性关系.

由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$,对 $\forall\, i$, $\boldsymbol{\beta}_i = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{A}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列,因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的极大无关组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 的极大无关组对应,即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 与 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 有相同的秩,从而 $L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

点评　在数域 P 上的 n 维线性空间 V 中,任给定一组基,V 中任一向量组与在这组基下的坐标所构成的 P^n 中的向量组具有完全相同的线性关系,因而对 V 中向量组的研究完全归结为对其坐标的研究.

例 14　设 P 为数域,$\boldsymbol{A}\in P^{n\times s}, \boldsymbol{B}\in P^{s\times n}, \boldsymbol{\alpha}\in P^n$,证明

1) $W = \{\boldsymbol{B\alpha}\mid \boldsymbol{AB\alpha}=\boldsymbol{0}\}$是 P^s 的子空间;

2) 维$(W) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) - \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$.

证明　1) 对 $\forall\, \boldsymbol{B\alpha},\boldsymbol{C\alpha}\in W$,其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in P^{s\times n}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha}+\boldsymbol{C\alpha}) = \boldsymbol{AB\alpha}+\boldsymbol{AC\alpha} = \boldsymbol{0}$,所以　$\boldsymbol{B\alpha}+\boldsymbol{C\alpha}\in W$; $\forall\, k\in P$, $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B\alpha}) = k(\boldsymbol{AB\alpha}) = \boldsymbol{0}$,所以 $k\boldsymbol{B\alpha}\in W$,即

W 是 P^s 的子空间.

2) 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=r$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=t$,则

$$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}\quad \text{的解空间 } V_1 \text{ 的维数为 } p=n-r,$$

$$\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}\quad \text{的解空间 } V_2 \text{ 的维数 } q=n-t,$$

设 $\boldsymbol{\alpha}\in P^n$,使 $\boldsymbol{B\alpha}=\boldsymbol{0}$,则有 $\boldsymbol{AB\alpha}=\boldsymbol{0}$,所以 $V_1\subset V_2$.

取 V_1 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 将其扩充为 V_2 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\alpha}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_q$. 由 $W=\{\boldsymbol{B\alpha}\mid \boldsymbol{AB\alpha}=\boldsymbol{0}\}$,则 $W=L(\boldsymbol{B\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{B\alpha}_p,\boldsymbol{B\alpha}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{B\alpha}_q)$. 由 $\boldsymbol{B\alpha}_1=\cdots=\boldsymbol{B\alpha}_p=\boldsymbol{0}$,故 $W=L(\boldsymbol{B\alpha}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{B\alpha}_q)$.

下证 $\boldsymbol{B\alpha}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{B\alpha}_q$ 线性无关.

设 $x_{p+1}\boldsymbol{B\alpha}_{p+1}+\cdots+x_q\boldsymbol{B\alpha}_q=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{B}(x_{p+1}\boldsymbol{\alpha}_{p+1}+\cdots+x_q\boldsymbol{\alpha}_q)=\boldsymbol{0}$,因而,

$$x_{p+1}\boldsymbol{\alpha}_{p+1}+\cdots+x_q\boldsymbol{\alpha}_q\in V_1,$$

于是, $\exists\, y_1,\cdots,y_p$,使 $x_{p+1}\boldsymbol{\alpha}_{p+1}+\cdots+x_q\boldsymbol{\alpha}_q=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+y_p\boldsymbol{\alpha}_p$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\alpha}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_q$ 为 V_2 的基,因而 $x_i=0$, $i=1,\cdots,q$,故 $\boldsymbol{B\alpha}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{B\alpha}_q$ 线性无关,因此,

$$\text{维}(W)=q-p=(n-t)\cdots(n-r)=r-t=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}).$$

例 15 设 P 为数域,在 $P[x]_n$ 中,证明

1) $f_i=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)$, $i=1,\cdots,n$ 是 $P[x]_n$ 的一组基,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的数;

2) 在 1)中,取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使全是 n 次单位根,求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵.

证明 1) 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性相关,则 $\exists\, f_i$ 使 f_i 可由 $f_1,f_2,\cdots,f_{i-1}f_{i+1},\cdots,f_n$ 线性表示. 设 $f_i=x_1f_1+\cdots+x_{i-1}f_{i-1}+x_{i+1}f_{i+1}+\cdots+x_nf_n$,取 $x=a_i$,则左边 $\neq 0$,而右边 $=0$,矛盾,因此 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关,因而 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $P[x]_n$ 的一组基.

2) 由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全体单位根,由 1),对 $\forall\, i$,

$$f_i=\frac{x^n-1}{x-a_i}=x^{n-1}+a_ix^{n-2}+a_i^2x^{n-3}+\cdots+a_i^{n-2}x+a_i^{n-1}.$$

因此,
$$(f_1,f_2,\cdots,f_n)=(1,x,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

例 16 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩为 n,证明在 $\mathbf{R}^n$ 中,存在维数为

$\frac{1}{2}(n-|s|)$的子空间 V_1,使任一$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_1$,有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$,其中 s 为二次型的符号差.

证明 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$.对于 $\boldsymbol{A}$,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\}p \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\}q \end{matrix},\ s=p-q.$$

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,则有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi(y_1,\cdots,y_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2.$$

若 $p\geqslant q$,令 $\boldsymbol{Y}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right\}p \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right\}q \end{matrix}$,$\boldsymbol{Y}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right\}p \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}}\right\}q \end{matrix}$,$\cdots$,$\boldsymbol{Y}_q=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\0\\1\\0\end{matrix}}\right\}q \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\0\\0\end{matrix}}\right\}p-q \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}\vdots\\0\\1\end{matrix}}\right\}q \end{matrix}$,

则 $\varphi(\boldsymbol{Y}'_i)=0$,$i=1,\cdots,q$.

由于 $\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_q$线性无关,令 $V_0=L(\boldsymbol{Y}'_1,\cdots,\boldsymbol{Y}'_q)$,则维$(V_0)=q=\frac{1}{2}(n$

$-|s|)$，而且，对 $\boldsymbol{Y}\in V_0$，有 $\varphi(\boldsymbol{Y}')=0$.

由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$，$\boldsymbol{C}$ 可逆，因而 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{CY}_1,\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{CY}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_q=\boldsymbol{CY}_q$ 线性无关.

令 $V_1=L(\boldsymbol{X}'_1,\boldsymbol{X}'_2,\cdots,\boldsymbol{X}'_q)$，则维$(V_1)=q=\frac{1}{2}(n-|s|)$，而且，对 $\forall\boldsymbol{X}\in V_1$，$\exists\,\boldsymbol{Y}\in V_0$，使 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$，从而有 $f(\boldsymbol{X}')=\varphi(\boldsymbol{Y}')=0$.

若 $p<q$，可类似的证明结论成立.

例 17 设 P 为数域，给出 P^3 的两个子空间为

$$V_1=\{(a,b,c)\mid a=b=c,a,b,c\in P\},$$
$$V_2=\{(0,x,y)\mid x,y\in P\}.$$

证明：$P^3=V_1\dot{+}V_2$.

证明 证法 1 易知 $V_1=L(1,1,1)$，$V_2=L((0,1,1),(0,0,1))$，$\forall(a,b,c)\in P^3$，$(a,b,c)=(a,a,a)+(0,b-a,c-a)\in V_1+V_2$，因而

$$P^3=V_1+V_2.$$

由维$(V_1)=1$，维$(V_2)=2$，因而

$$维(V_1)+维(V_2)=维(V_1+V_2),$$

故 $P^3=V_1\dot{+}V_2$.

证法 2 对于 $P^3=V_1+V_2$，设 $(x,y,z)\in V_1\cap V_2$，则由 $(x,y,z)\in V_1$，可推出 $x=y=z$. 由 $(x,y,z)\in V_2$，可推出 $x=0$. 因此，$x=y=z=0$，即 $V_1\cap V_2=\{0\}$，从而 $P^3=V_1\dot{+}V_2$.

证法 3 对于 $P^3=V_1+V_2$，取 V_1 的基 $(1,1,1)$，取 V_2 的基 $(0,1,0),(0,0,1)$，显然有 $(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)$ 为 P^3 的基，即 V_1 与 V_2 的基的联合为 $P^3=V_1+V_2$ 的基，因此 $P^3=V_1\dot{+}V_2$.

点评 以上用一个和是直和的不同判别条件进行了证明，在证明过程中，针对不同的问题，选择最优的证明方法.

例 18 设 U 和 W 分别是方程组

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \quad 和\ x_1=x_2=\cdots=x_n$$

的解空间，证明 $P^n=U\dot{+}W$.

证明 证法 1 由于 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的系数矩阵的秩为 1，所以，维$(U)=n-1$，取 U 的一组基为

$$\begin{cases}\alpha_1=(-1,1,0,\cdots,0),\\ \alpha_2=(-1,0,1,0,\cdots,0),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_n=(-1,0,\cdots,0,1).\end{cases}$$

方程组 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 可写为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0,$$

系数矩阵的秩为 $n-1$,因此维$(W)=1$,其基为

$$\boldsymbol{\beta}=(1,1,\cdots,1).$$

由于行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.故

$$P^n=L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1},\boldsymbol{\beta})=L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1})+L(\beta)=U\dot{+}W$$

证法 2　将两个方程组联立有

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0,$$

由于系数行列式不为零,故只有零解,即 $U\cup W=\{\boldsymbol{0}\}$,因此

$$维(U)+维(W)=维(U+W),$$

由于维$(U)=n-1$,维$(W)=1$,所以,维$(U+W)=n$,于是有,$P^n=U\dot{+}W$.

点评　由此问题的特点,由于 U 和 W 的基不确定,$U\cup W$ 易求出,故利用维数公式或基的联合是证明该问题的较好的方法.

例 19　设 M 是数域 P 上 n 阶循环矩阵的集合,即

$$M=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}\middle| a_i\in P\right\}.$$

证明:M 是 $P^{n\times n}$ 的子空间,且对 $\forall\ \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M$,有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,并求 M 的维数和一组基.

证明　由于两个循环矩阵的和以及数与循环矩阵的积仍是循环矩阵,故 M

是 $P^{n\times n}$ 的子空间.

取 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{E}_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{D}^k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n-k}\\ \boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$,$k=1,\cdots,n-1$.

易知 $\boldsymbol{D}^k\in M$.且 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{D}^2,\cdots,\boldsymbol{D}^{n-1}$线性无关.

对于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n-2}\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1\end{pmatrix}\in M,$$

$\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{E}+a_2\boldsymbol{D}+a_3\boldsymbol{D}^2+\cdots+a_n\boldsymbol{D}^{n-1}$,故维$(M)=n$.对 $\forall\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M$,设 $\boldsymbol{A}=f(\boldsymbol{D}),\boldsymbol{B}=g(\boldsymbol{D})$,则 $\boldsymbol{AB}=f(\boldsymbol{D})g(\boldsymbol{D})=g(\boldsymbol{D})f(\boldsymbol{D})=\boldsymbol{BA}$.

例 20 设 P 为数域,$\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$,$f(x),g(x)\in P[x]$,且$(f(x),g(x))=1$,令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$,对于 P^n的 3 个子空间

$$V=\{\boldsymbol{X}\in P^n\mid f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\},$$
$$V_1=\{\boldsymbol{X}\in P^n\mid f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\},$$
$$V_2=\{\boldsymbol{X}\in P^n\mid g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\},$$

证明 $V=V_1\dotplus V_2$.

证明 由于 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$,因而 $V_1,V_2\subseteq V$,于是 $V_1+V_2\subseteq V$.

由于$(f(x),g(x))=1$,故 $\exists\, u(x),v(x)\in P[x]$,使 $f(x)u(x)+g(x)\cdot v(x)=1$,从而有

$$f(\boldsymbol{A})u(\boldsymbol{A})+g(\boldsymbol{A})v(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}.$$

对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,

$$\boldsymbol{\alpha}=E\boldsymbol{\alpha}=(f(\boldsymbol{A})u(\boldsymbol{A})+g(\boldsymbol{A})v(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{\alpha}=f(\boldsymbol{A})u(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}+g(\boldsymbol{A})v(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,因而 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.于是,令 $\boldsymbol{\alpha}_1=f(\boldsymbol{A})u(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=g(\boldsymbol{A})v(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}$,则

$$g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_1=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})u(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=u(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$
$$f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_2=f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})v(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=v(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_2,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1$,即 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2+V_1=V_1+V_2$,所以 $V=V_1+V_2$.

设 $\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2$，则 $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}=g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，因此

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\beta}=f(\boldsymbol{A})u(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}+g(\boldsymbol{A})v(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}.$$

即 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$，因此 $V=V_1\dot{+}V_2$.

例 21 设 P 为数域，令 $V_1=\{\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}\mid \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'\}$，$V_2=\{\boldsymbol{B}\in P^{n\times n}\mid \boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}'\}$.

证明 $P^{n\times n}=V_1\dot{+}V_2$.

证明 证法 1 $\forall \boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'}{2}+\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'}{2}$，由

$$\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'}{2}\right)'=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'}{2},\left(\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'}{2}\right)'=\frac{\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}}{2}=-\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'}{2},$$

故$\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'}{2}\in V_1$，$-\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'}{2}\in V_2$，即有 $P^{n\times n}=V_1+V_2$.

设 $\boldsymbol{B}\in V_1\cap V_2$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}'=-\boldsymbol{B}$，因而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，即 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$，故有 $P^{n\times n}=V_1\dot{+}V_2$.

证法 2 由 V_1的定义，$\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}\in V_1$，其中 $\boldsymbol{E}_{ij}$的 i 行 j 列的元素为 1，其余元素为 0. 显然，所有的 $\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}$是线性无关的，$i,j=1,\cdots,n$，且是 V_1的一组基，即维$(V_1)=\dfrac{n^2+n}{2}$. 而所有 $\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ji}(i>j)\in V_2$，且线性无关，即是 V_2的一组基，因而维$(V_2)=\dfrac{n^2-n}{2}$. 又由于 $V_1\cap V_2=\{0\}$，因此 $n=$维$(V_1)+$维$(V_2)=$维(V_1+V_2). 故 $P^{n\times n}=V_1\dot{+}V_2$.

证法 3 由证法 2，V_1的基是 $\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}$，$i,j=1,\cdots,n$. V_2的基是 $\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ji}$，$i,j=1,\cdots,n$，且 $i>j$.

设
$$\sum_{i,j=1,i\geqslant j}^{n}x_{ij}(\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji})+\sum_{k,l=1}^{n}y_{kl}(\boldsymbol{E}_{kl}-\boldsymbol{E}_{lk})=0. \tag{1}$$

设 $i\geqslant j,k>l$. 于是

$$\sum_{k>l}^{n}(x_{kl}+y_{kl})\boldsymbol{E}_{kl}+\sum_{k=1}^{n}x_{kk}\boldsymbol{E}_{kk}+\sum_{k>l}^{n}(x_{kl}-y_{kl})\boldsymbol{E}_{lk}=0.$$

由于所有的 $\boldsymbol{E}_{ij}$线性无关，$i,j=1,\cdots,n$. 故

$$x_{kl}+y_{kl}=0,x_{kk}=0,x_{kl}-y_{kl}=0,$$

其中 $k,l=1,\cdots,n$，且 $k>l$. 因而，所有的 $x_{kl}=0,k\geqslant l$，且所有的 $y_{kl}=0,k>l$. 这就证明了所有的 $\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}$和所有的$\boldsymbol{E}_{kl}-\boldsymbol{E}_{lk}$的联合为 V_1+V_2的基，故

$$P^{n\times n}=V_1\dot{+}V_2.$$

点评 3 种证法均使用直和的判别条件，证法 1 和证法 2 较简单些，但证法 3 的证明要正确理解(1)式和下标符号的使用，最后证明了基的联合仍然为

$P^{n\times n}$的基.

例 22 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,在 $\boldsymbol{A}$ 的两行之间划线分块使 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$,证明 P^n是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的两个解空间 V_1与 V_2的直和.

证明 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1)=r$,由 $\boldsymbol{A}$ 可逆,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_2)=n-r$,因而维$(V_1)=n-r$,维$(V_2)=r$.

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-r}$为 V_1的一组基,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$为 V_2的一组基.下证 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-r},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$线性无关.

设 $k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-r}+l_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\eta}_r=\boldsymbol{0}$.令 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-r}=-l_1\boldsymbol{\eta}_1-\cdots-l_r\boldsymbol{\eta}_r$,则 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$,因而

$$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆,有 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,即 $k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-r}=\boldsymbol{0}$,$l_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\eta}_r=\boldsymbol{0}$.由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-r}$与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$分别是 V_1和 V_2的基,故有 $k_i=0,i=1,\cdots,n-r,l_j=0,j=1,\cdots,r$.因而 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-r},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$线性无关,即 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-r},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$是$P^n$的一组基.故有 $P^n=V_1\dotplus V_2$.

例 23 设 V 是数域P 上的 n 维线性空间,V_1,V_2是 V 的子空间,且维$(V_1+V_2)=$维$(V_1\cap V_2)+1$,证明

$$V_1+V_2=V_1,V_1\cap V_2=V_2\text{或 }V_1+V_2=V_2,V_1\cap V_2=V_1.$$

证明 由维数公式维$(V_1)+$维$(V_2)=$维$(V_1+V_2)+$维$(V_1\cap V_2)$.由已知条件,维$(V_1)+$维$(V_2)=2$维$(V_1\cap V_2)+1$,于是有

$$(\text{维}(V_1)-\text{维}(V_1\cap V_2))+(\text{维}(V_2)-\text{维}(V_1\cap V_2))=1.$$

从而得,维$(V_1)-$维$(V_1\cap V_2)=0$或 1.

若维$(V_1)-$维$(V_1\cap V_2)=0$,由 $V_1\cap V_2\subseteq V_1$,故有 $V_1=V_1\cap V_2$,由此可知 $V_1\subseteq V_2$,也有 $V_1+V_2=V_2$.

若维$(V_1)-$维$(V_1\cap V_2)=1$,则有维$(V_2)-$维$(V_1\cap V_2)=0$,类似地,有 $V_1\cap V_2=V_2$,且 $V_1+V_2=V_1$.

例 24 设$\mathbf{C}$为复数域,令

$$H=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}\middle|\alpha,\beta\in\mathbf{C}\right\}.$$

证明:

1) H 关于矩阵的加法和数与矩阵的乘法构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间;

2) 求 H 的一组基和维数;

3）证 H 与 $\mathbf{R}^4$同构，并写出一个同构映射.

证明 1）由于 $\mathbf{C}^{2\times 2}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，易证在实数域 $\mathbf{R}$ 上，H 是 $\mathbf{C}^{2\times 2}$的子空间.

2）令 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&0\end{pmatrix}$.

设 $\sum_{i=1}^{4}k_i\boldsymbol{A}_i=\mathbf{0}$，则有 $\begin{pmatrix}k_1+k_3\mathrm{i}&k_2+k_4\mathrm{i}\\-(k_2+k_4\mathrm{i})&k_1+k_3\mathrm{i}\end{pmatrix}=\mathbf{0}$，从而有

$$\begin{cases}k_1+k_3\mathrm{i}=0\\k_2+k_4\mathrm{i}=0,\end{cases}$$

即

$$k_1=k_2=k_3=k_4=0,$$

故 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$线性无关.

对 $\forall\,\boldsymbol{A}\in H$，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a+b\mathrm{i}&c+d\mathrm{i}\\-(c+d\mathrm{i})&a+b\mathrm{i}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}_1+c\boldsymbol{A}_2+b\boldsymbol{A}_3+d\boldsymbol{A}_4$，

因而 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$是 H 的一组基，从而有维$(H)=4$，

3）由于维$(\mathbf{R}^4)=$维$(H)=4$. 故 $H\cong\mathbf{R}^4$.

令 $\sigma:H\to\mathbf{R},\begin{pmatrix}a+b\mathrm{i}&c+d\mathrm{i}\\-(c+d\mathrm{i})&a+b\mathrm{i}\end{pmatrix}\mapsto(a,b,c,d)$，则 σ 是H 到 $\mathbf{R}^4$的一个同构映射.

§6.3 习　　题

1. 设 P 是数域，在 P^4 中，求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在所指定基下的坐标.

1）$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1),\\\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 1,-1,-1),\\\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,\ 1,-1),\\\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,\ 1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,\ 1,-1,\ 1),\\\boldsymbol{\beta}_2=(0,\ 3,\ 1,\ 0),\\\boldsymbol{\beta}_3=(5,\ 3,\ 2,\ 1),\\\boldsymbol{\beta}_4=(6,\ 6,\ 1,\ 3),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标；

2）$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,-1,\ 0),\\\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 1,\ 1,\ 1),\\\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,\ 2,\ 1,\ 1),\\\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,-1,\ 0,\ 1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,\ 1,\ 0,\ 1),\\\boldsymbol{\beta}_2=(0,\ 1,\ 2,\ 2),\\\boldsymbol{\beta}_3=(-2,\ 1,\ 1,\ 2),\\\boldsymbol{\beta}_4=(1,\ 3,\ 1,\ 2),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(1,\ -1,0,\ 3)$在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的坐标；

3) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 1,\ 0,\ 0),\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ 1,\ 1,\ 0),\\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,\ 1,\ 1,\ 1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(1,\ 1,\ 0,\ 1),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(2,\ 1,\ 3,\ 1),\\ \boldsymbol{\beta}_3=(1,\ 1,\ 0,\ 0),\\ \boldsymbol{\beta}_4=(0,\ 1,-1,-1),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,-1)$在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标.

2. 在 P^4中,求一非空向量在基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1)$$

与基 $\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,-1,1),\boldsymbol{\eta}_2=(0,3,1,0),\boldsymbol{\eta}_3=(5,3,2,1),\boldsymbol{\eta}_4=(6,6,1,3)$

下有相同的坐标.

3. 设 P 是数域,在 P^4中,求向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$生成的子空间的维数和一组基.其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(1,\ -3,\ 2,\ -1),\\ \boldsymbol{\alpha}_2&=(-2,\ 1,\ 5,\ 3),\\ \boldsymbol{\alpha}_3&=(4,\ -3,\ 7,\ 1),\\ \boldsymbol{\alpha}_4&=(-1,\ -11,\ 8,\ -3).\end{aligned}$$

4. 设 P 为数域,$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\4&-2&1\end{pmatrix}$,求 $P^{3\times 3}$的子空间 $C(\mathbf{A})$的维数和一组基,其中 $C(\mathbf{A})$是 P 上与 $\mathbf{A}$ 可交换的 3 阶方阵的集合.

5. 在 P^5中,求方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0\end{cases}$$

的解空间的维数和一组基.

6. 在 P^3中,设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ -1,\ 2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ -1,\ 3,\ 0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,\ -3,\ 5,\ -4),$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,\ 2,\ 2,\ 1),\boldsymbol{\beta}_2=(4,\ -3,\ 3,\ 1).$$

令 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$,求 V_1+V_2和 $V_1\cap V_2$的维数和一组基.

7. 给出数域 P 上的两个方程组:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\ 4x_1-2x_2+6x_3-4x_5=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3-7x_5=0.\end{cases}$$

它们的解空间分别是 V_1 和 V_2，求 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$ 的维数和一组基.

8. 设 P 是数域，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D} \in P^{n\times n}$ 且满足条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{E}$，给出 P^n 的三个子空间

$$V = \{\boldsymbol{x} \in P^n \mid \boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}\},$$
$$V_1 = \{\boldsymbol{x} \in P^n \mid \boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}\},$$
$$V_2 = \{\boldsymbol{x} \in P^n \mid \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\}.$$

证明 $V = V_1 \dotplus V_2$.

9. 设 V_1, W 是数域 P 上线性空间的两个子空间，且 $V_1 \subset W$，设 V_1 在 V 中的解空间是 V_2，证明 $W = V_1 \dotplus (V_2 \cap W)$.

10. 设 V_1, V_2, V_3 都是 n 维线性空间的子空间，若

$$V_2 \subseteq V_3, V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3, V_1 + V_2 = V_1 + V_3,$$

证明 $V_2 = V_3$.

11. 设 $\mathbf{R}$ 是实数域，$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$，证明

1) M 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，并求 M 的维数和一组基；

2) 复数域 $\mathbf{C}$ 作为 $\mathbf{R}$ 上的线性空间与 M 同构，并写出其同构映射.

12. 设 V 是数域 P 上的线性空间，$V_1, \cdots, V_s$ 是 V 的子空间，若 $W = V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 不是直和，证明 $\boldsymbol{W}$ 的每个向量的表示法都不唯一.

13. 设 V 是数域 P 上的线性空间，且 $V \neq \{\boldsymbol{0}\}$，证明 V 不能表示成它的两个真子空间的并集.

14. 设 W 是 n 维线性空间 V 的一个子空间，且 $0 <$ 维$(W) < n$，证明 W 在 V 中的余子空间不唯一.

15. 设 V 是数域 P 上的线性空间，$V_1, \cdots, V_s$ 是 V 的子空间，证明 $V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j = \{\boldsymbol{0}\}$ 的充要条件是 $V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} V_j = \{\boldsymbol{0}\}$.

16. 设 P 为数域，在 $P^{m\times n}$ 中，令

$$P^{m\times n}\boldsymbol{E}_{ii} = \{\boldsymbol{AE}_{ii} \mid \boldsymbol{A} \in P^{m\times n}\},$$

其中 E_{ii} 表示 i 行 j 列为 1，其余元素全为 0 的 $m\times n$ 矩阵，$1 \leqslant i \leqslant n$，证明

1) $P^{m\times n}E_{ii}$ 是 $P^{m\times n}$ 的子空间，$1 \leqslant i \leqslant n$；

2) $P^{m\times n} = P^{m\times n}\boldsymbol{E}_{11} \dotplus P^{m\times n}\boldsymbol{E}_{22} \dotplus \cdots \dotplus P^{m\times n}\boldsymbol{E}_{nn}$.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，用 U 表示 $\boldsymbol{A}$ 的列空间，$\boldsymbol{W}$ 表示 $\boldsymbol{AA}'$ 的列空间，证明 $U = W$.

18. 设 V 是数域 P 上的线性空间(未必是有限维的)，若 V 的一个非空子集 T 满足条件：

1）T 的任意有限个向量都线性无关；

2）V 的每个向量可由 T 的有限个向量线性表示，

则称 T 是 V 的基.

假设 V_1, V_2是 V 的两个子空间，T_1, T_2分别为其基，且 $T_1 \cap T_2 = \varnothing$，$T_1 \cup T_2$是 $V_1 + V_2$的基，证明和 $V_1 + V_2$是直和.

19. 设 P 为数域，$\boldsymbol{A} \in P^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$分块

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix},$$

其中
$$\boldsymbol{A}_{11} \in P^{r\times k}, \boldsymbol{B}_{11} \in P^{k\times r},$$

设 W 和 U 分别为 $\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}$ 的解空间，证明：$W \cong U$.

20. 设 P 为实数域，对任意正整数（$m \geqslant n$），证明，在 P^n 中存在 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，使其中任意 n 个向量线性无关.

§6.4 习题答案与提示

1. 1）$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & \frac{11}{4} & 4 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 2 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \frac{4}{9}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_3 - \frac{11}{9}x_4 \\ \frac{1}{27}x_1 + \frac{4}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{23}{27}x_4 \\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_4 \\ \frac{7}{27}x_1 - \frac{1}{9}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{26}{27}x_4 \end{pmatrix}$.

2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\left(\frac{16}{13}, \frac{18}{13}, -\frac{2}{13}, \frac{23}{13}\right)$.

3）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\left(-1 \quad -\frac{1}{2}, \quad 4, \quad -\frac{3}{2}\right)$.

2. $(1, 1, 1, -1)$.

3. 维数为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是一组基.

4. 设 $\boldsymbol{B} \in P^{3\times 3}$且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，求得 $\boldsymbol{B}$ 有形式

$$B=\begin{pmatrix} a & -2c & b \\ b-c & a-4c & c \\ 4b-2c & -2b & a+b \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{B}$ 确定 $C(\boldsymbol{A})$ 的维数和基.

5. 维数为 2,基是 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,1,0,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,1,3\right)$.

6. 维$(V_1+V_2)=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_1$ 为一组基.

维$(V_1)=2$,维$(V_2)=2$,故维$(V_1\cap V_2)=1$,V_1 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,$V_2$ 的基为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$,解方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,求得 $V_1\cap V_2$ 的基为$(-1,-2,1,1)$.

7. 解方程组得到两个解空间分别是

$$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\quad V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2),$$

其中,

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ -2,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ -2,\ 0,\ 1,\ 0)$,

$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,\ -6,\ 0,\ 0,\ 1)$, $\boldsymbol{\beta}_1=(1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0)$,

$\boldsymbol{\beta}_2=(3,\ 2,\ 0,\ 1,\ 2)$.

维$(V_1+V_2)=5$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为基,维$(V_1\cap V_2)=\{\boldsymbol{0}\}$,无基.

8. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可证 $V_1+V_2=V$,且 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$.

9. 由补空间的定义证.

10. 由维数公式证明维$(V_2)=$维(V_3),再由 $V_2\subset V_3$ 可得.

11. 2) $\varphi: M\to \mathbf{C}$,$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\mapsto a+b\mathrm{i}$

12. 证明零向量表示不唯一.

13. 若 $V=V_1\cup V_2$,V_1,V_2 是 V 的真子空间,则 V_1 和 V_2 均不是零子空间,即 V_1,V_2 都是非平凡子空间.

14. 在三维几何空间中举一例子.

15. $\sum\limits_{j=1}^{i-1}V_j\subseteq\sum\limits_{j\neq i}V_j\quad(i=2,\cdots,s)$ 可得必要性,另一方面,设 $\boldsymbol{\alpha}\in V_i\cap\sum\limits_{j\neq i}V_j$,设 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{j\neq i}\boldsymbol{\alpha}_j$,$\boldsymbol{\alpha}_k\in V_k$,则 $\boldsymbol{\alpha}_n\in V_n\cap\sum\limits_{j=1}^{i-1}V_j\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$,最后证得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

16. 2) 设 $\boldsymbol{AE}_{ii}=\boldsymbol{B}$,则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 除第 i 列外其余全为 $\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列与 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列相同.

17. 证明 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $(\boldsymbol{AA}')\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{AA}'$ 的列向量组是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的线性组合.

18. 对 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V_1 \cap V_2, \boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\alpha}_i \in T_1, \boldsymbol{\beta}_j \in T_2$,再则由 $T_1 \cap T_2 = \varnothing$ 且 $T_1 \cup T_2$ 是 $V_1 + V_2$ 的基证明结论.

19. $\forall \boldsymbol{\alpha} \in W$,有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{B}_{22}\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix},$$

于是,$\boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{\alpha} \in U$.令 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{\alpha}$,证 σ 是同构映射.

20. 取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, \ 2, \ 2^2, \ \cdots, \ 2^{n-1})$,

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, \ 2^2, (2^2)^2, \cdots, (2^2)^{n-1}),$$

如此继续下去,

$$\boldsymbol{\alpha}_m = (1, 2^m, (2^m)^2, \cdots, (2^m)^{n-1}).$$

由范得蒙行列式性质得证.

第七章 线性变换

§7.1 基本知识

一、线性变换的定义及性质

1. 线性变换的定义

数域 P 上线性空间 V 的一个变换 σ 称为 V 的线性变换，如果 $\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，$\forall k\in P$，有以下条件满足：

1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$；

2) $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$.

若线性变换 σ 是满射（单射，双射），则称 σ 是满线性变换（单线性变换，可逆线性变换）.

特别地，若对 $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$，$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，称 σ 为零变换，记作0. 若对 $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$，$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$，称 σ 为 V 的恒等变换，记作 ε（也说是单位变换）. V 上全体线性变换的集合记为 $L(V)$. $L(V)$ 也是 P 上的线性空间.

2. 线性变换的性质

设 V 是数域 P 上的线性空间，σ 是 V 的线性变换，则有

1) $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,

2) $\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha})$, $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$,

3) $\sigma\left(\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)$, $\boldsymbol{\alpha}_i\in V, k_i\in P, i=1,\cdots,s$,

4) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in V$，且线性相关，则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 也线性相关. 但当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关时，不能推出 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 线性无关.

5) 线性变换 σ 是可逆的（一一的）充分必要条件是：存在线性变换 τ，使得 $\sigma\tau=\varepsilon$（或 $\tau\sigma=\varepsilon$），其中 ε 为恒等变换.

二、线性变换的矩阵和矩阵的相似

1. 线性变换的矩阵的定义

设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一组基，令

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.$$

用矩阵形式表示为：

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)&=(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n))\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

称 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵，且称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩是线性变换 σ 的秩，即 σ 的秩 = $\boldsymbol{A}$ 的秩.

2. $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 在同一组基下的坐标之间的关系

设 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，即 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，则

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha})&=\sigma\left[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right]=[\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\end{aligned}$$

即 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标是$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,由此给出了 $\boldsymbol{\alpha}$ 和$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标之间的关系.

3. 同一线性变换在不同基下的矩阵之间的关系

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是 V 的两组基,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵为$\boldsymbol{T}$,即$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}$,$\boldsymbol{T}$ 是 n 阶可逆矩阵,若 σ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则 σ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的矩阵为$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$,它和 σ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是相似的,即同一个线性变换在不同基下的矩阵相似.

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,易知矩阵的相似关系是一个等价关系.

4. 两个相似矩阵可视为同一个线性变换在不同基下的矩阵.

设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in P^{n\times n}$,则有可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$V$ 的一组基,定义 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$,则 σ 是 V 的线性变换.

令$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}$,则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$也是 V 的一组基,$\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 是线性变换σ 分别在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的矩阵.

5. 设 V 是数域P 上 n 维线性空间,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是 V 的一组基,对每一个$\sigma\in L(V)$,$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_\sigma$,$\boldsymbol{A}_\sigma\in P^{n\times n}$,

令 $\varphi:L(V)\to P^{n\times n}$,$\sigma\mapsto\boldsymbol{A}_\sigma$,则 φ 是数域P 上 n^2 维线性空间 $L(V)$与$P^{n\times n}$的同构映射,从而 $\dim(L(V))=n^2$.

三、线性变换的值域、核和不变子空间

设 V 是数域 P 上的线性空间,σ 是 V 的一个线性变换,称集合$\{\sigma(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in V\}$是 σ 的像,也叫 σ 的值域,表示为 $\sigma(V)$或 $\operatorname{Im}\sigma$. 称集合$\{\sigma(\boldsymbol{\alpha})\mid\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}\}$是 σ 的核,表示为 $\operatorname{Ker}\sigma$ 或$\sigma^{-1}(\boldsymbol{0})$.

设 W 是 V 的一个子空间,如果 $\sigma(W)\subseteq W$,称 W 是 V 的不变子空间.

关于数域 P 上线性空间 V 的线性变换σ,以下诸条件成立.

1. $\sigma(V)$和 $\sigma^{-1}(\boldsymbol{0})$是 σ 的不变子空间.

2. 线性变换 σ 是单射的充要条件是$\sigma^{-1}(\boldsymbol{0})=\{\boldsymbol{0}\}$.

3. 若 V 是有限维线性空间,则 σ 单当且仅当σ 满,当且仅当 σ 将一组基变为一组基.

4. 若 V 是 n 维线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基，且$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为线性变换σ 的秩，易知，σ 的秩是子空间 $\sigma(V)$的维数.

5. 若 V 是 n 维线性空间，则

$$\sigma\text{ 的秩}+\sigma\text{ 的零度}=n.$$

6. 若 σ 是数乘变换，则 V 的任一子空间是σ 的不变子空间.

7. 若 σ 和τ 均为V 的线性变换且$\sigma\tau=\tau\sigma$，则 $\tau(V)$和 $\tau^{-1}(\mathbf{0})$都是 σ 的不变子空间.

8. 若 W 是线性变换σ 和τ 的不变子空间，则 W 一定是$\sigma+\tau$ 和$\sigma\tau$ 的不变子空间.

9. σ 是可逆线性变换，则 W 是σ 的不变子空间当且仅当 W 是σ^{-1}的不变子空间.

10. 若 W_1,W_2是 σ 的不变子空间，则 W_1+W_2和 $W_1\cap W_2$都是 σ 的不变子空间.

11. 若 V 是有限维线性空间，则 V 能分解为σ 的若干个不变子空间的直和当且仅当 σ 在某组基下的矩阵为准对角形矩阵.

四、线性变换(或 n 阶方阵)的特征值与特征向量

1. 特征值与特征向量的定义

设 V 是数域P 上的n 维线性空间，σ 是V 的线性变换，$\lambda_0\in P$，若$\exists\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，使 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$，则称 λ_0为线性变换 σ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是σ 的属于特征值λ_0的特征向量.

λ_0是线性变换 σ(或 n 阶方阵$\boldsymbol{A}$)的特征值当且仅当 λ_0是 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 的根，且 $\lambda_0\in P$(若 λ_0为 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$的根，但 $\lambda_0\notin P$，则称 λ_0为 $\boldsymbol{A}$ 的特征根).

$\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$(或 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$) 是 σ(或 $\boldsymbol{A}$)的属于特征值λ_0的特征向量当且仅当$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的非零解.

2. 特征矩阵和特征多项式

设 σ 为数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一组基，

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$$

称 n 阶 λ 矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为线性变换 σ（或 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$）的特征矩阵，称多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 为 σ（或 $\boldsymbol{A}$）的特征多项式，而且

$$f(\lambda)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in P^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，但反之不真. 对于给定的有限维线性空间 V 上的线性变换 σ，由于 σ 在不同基下的矩阵是相似的，因此，求 σ 的特征值和特征向量问题与基的选择无关.

4. 线性变换 σ（或 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$）的属于不同特征值的特征向量线性无关.

5. λ_0 是线性变换 σ（或 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$）的特征值，则对 $\forall k\in\mathbf{N}$，λ_0^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值.

6. 线性变换 σ（或 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$）不可逆的充要条件是 σ（或 $\boldsymbol{A}$）有零特征值，且当 σ（或 $\boldsymbol{A}$）可逆时，若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有互异的特征值，则 σ^{-1}（或 $\boldsymbol{A}^{-1}$）的所有互异的特征值是 $\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_s^{-1}$.

7. 若 λ_0 是线性变换 σ（或 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$）的特征值，属于 λ_0 的所有特征向量再添加零向量构成 V（或 P^n）的子空间，称这个子空间为 σ（或 $\boldsymbol{A}$）的关于特征值 λ_0 的特征子空间，记作 V_{λ_0}，而维(V_{λ_0})为$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数.

8. 若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是线性变换 σ（或 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$）的全部互异的特征值，则和 $V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_s}$ 是直和. 若维$(V_{\lambda_1})+\cdots+$维$(V_{\lambda_s})=n$，则 $V=V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_s}$，且 $V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_s}$ 的基的联合是 V 的一组基，在此基下，σ 的矩阵是准对角形.

9. $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$，设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$（可能有相同的）为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征根，则 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹，而 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

10.（特征多项式的降阶定理）在数域 P 上，设 $\boldsymbol{A}\in P^{m\times n}$，$\boldsymbol{B}\in P^{n\times m}$，则对 $\forall\lambda\in P,\lambda\neq0$，有

$$|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB}|=\lambda^{m-n}|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|.$$

特别地，当 $n=1$ 时

$$|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB}|=\lambda^{m-1}|\lambda-\boldsymbol{BA}|.$$

当 $n=m$ 时 $\quad|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|.$

证明. 经初等变换，则有 $\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A}_{m\times n}\\ \boldsymbol{B}_{n\times m} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}_{m\times n}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$，

$$\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A}_{m\times n} \\ \boldsymbol{B}_{n\times m} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A}_{m\times n} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA} \end{pmatrix},$$

故有 $\quad |\lambda\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{AB}| = \lambda^m \left|\boldsymbol{E}_n - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA}\right| = \lambda^{m-n}|\lambda\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{BA}|$.

五、n 阶方阵的相似对角形

设 P 为数域,$\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$,$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$是 $\boldsymbol{A}$ 的所有互异的特征值,则下列条件等价:

1. $\boldsymbol{A}$ 与数域P 上的对角矩阵相似;
2. 在 P^n中,σ 有 n 个线性无关的特征向量;
3. $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i$ 的重数 $= n$,且 V_{λ_i} 的维数 $= \lambda_i$ 的重数,$i = 1,\cdots,s$;
4. $\sum_{i=1}^{s}\dim(V_{\lambda_i}) = n$;

若 $P=\mathbf{C}$(复数域),则还有(见第八章)

5. $\boldsymbol{A}$ 的每个若尔当块皆为 1 级的;
6. $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式无重根;
7. $\boldsymbol{A}$ 的最后一个不变因子无重根;
8. $\boldsymbol{A}$ 的初等因子是一次的.

§7.2 例　　题

例 1 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$是 4 维线性空间 V 的一组基,线性变换 σ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) 求 σ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\varepsilon}_4$下的矩阵;

2) 求 σ 的核与值域;

3) 在 σ 的核中任选一组基,把它扩充成 V 的一组基,并求 σ 在这组基下的矩阵;

4) 在 σ 的值域中选一组基,把它扩充成 V 的一组基,并求 σ 在这组基下的

矩阵.

解 1) 易知$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}$,

由已知,$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}$,

故 σ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$下的矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-3&3&2\\\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{10}{3}&\frac{10}{3}\\\frac{8}{3}&-\frac{16}{3}&\frac{40}{3}&\frac{40}{3}\\0&1&-7&-8\end{pmatrix},$$

其中$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

2) 由于维$(\sigma(V))=$矩阵$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}$的秩$=2$,故维$(\sigma^{-1}(\mathbf{0}))=$
2.

设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3+x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$,则

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

从而$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}$,解得基础解系为$\begin{pmatrix}4\\3\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$,

即 $\boldsymbol{\beta}_1=4\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_4$为 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$的基.故

$$\sigma^{-1}(\mathbf{0})=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=L(4\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_4).$$

又 $\sigma(V)=L(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_3),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_4))$,由于 σ 的秩$=2$,故

$$\begin{aligned}\sigma(V)&=L(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2))=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+2\boldsymbol{\varepsilon}_4,2\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3-2\boldsymbol{\varepsilon}_4)\\&=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+3\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_4)\\&=L(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2),\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+3\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_4$.

3) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$扩充为 V 的基,

$$\boldsymbol{\beta}_1=4\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\varepsilon}_4.$$

由于$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}4&1&0&0\\3&2&0&0\\-2&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$,

故 σ 在$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&0&0\\3&2&0&0\\-2&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&0&0\\3&2&0&0\\-2&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0&0\\-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0&0\\\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}&1&0\\-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&0&1&3\\0&0&5&5\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\0&0&-\frac{2}{5}&\frac{9}{5}\\0&0&\frac{31}{5}&\frac{23}{5}\\0&0&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

4) 将 $\sigma(V)$的基 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$扩充为 V 的基$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\gamma}_4=\boldsymbol{\varepsilon}_4$.由于

$$(\boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_3,\ \boldsymbol{\gamma}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\3&1&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix},$$

故 σ 在$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$下的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\3&1&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\3&1&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-2&-1&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&1&2&1\\2&0&1&3\\16&2&5&5\\5&1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&1&2&1\\-5&-1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

例 2 在 P^3中,定义线性变换 σ 为

$$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1).$$

1) 求 σ 在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,\ 0,\ 0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,\ 1,\ 0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,\ 0,\ 1)$下的矩阵;

2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 0,\ -2)$,求 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,\ 0,\ 1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ -1,\ 1),\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,\ 0,\ 2)$下的坐标;

3) σ 是否可逆,若可逆,求 σ^{-1}.

解 1) $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=(2,\ 0,\ 1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(-1,\ 1,\ 0),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(0,\ 1,\ 0)$,于是

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

2）解法 1 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$,

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma\left((\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)=(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3))\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-1&0\\1&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\2\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}.$$

解法 2 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(1,\quad 0,\quad -2)=(2,\quad -2,\quad 1)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-1&0\\1&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&-1&0\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\2\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}.$$

解法 3　$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=(2,\ -2,\ 1)$，设 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 (x_1,x_2,x_3)，则有 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})=(2,\ -2,\ 1)$.

解方程组 $(\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}'_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-1&0\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\2\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}.$$

3) 由于 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵可逆，故 σ 可逆，$\forall\,\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)\in P^3$，

$$\sigma^{-1}(\boldsymbol{\beta})=\sigma^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&-1&0\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}2x_1-3\\-x_2\\x_1+x_2+2x_3\end{pmatrix}$$

$$=(2x_1-3,-x_2,x_1+x_2+2x_3).$$

例 3　P 为数域，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\in P^{3\times3}$，对任意的 $\boldsymbol{X}\in P^{3\times3}$，定义线性变换 $\sigma:\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}$，求 $\mathrm{Im}\,\sigma$ 和 $\mathrm{Ker}\,\sigma$，并分别给出它们的一组基和维数.

解　解法 1　对 $\forall\,\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{3\times3}\in P^{3\times3}$，

$$\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_{11}-x_{31}&x_{12}-x_{32}&x_{13}-x_{33}\\-x_{21}&-x_{22}&-x_{23}\\x_{11}-x_{21}-x_{31}&x_{12}-x_{22}-x_{32}&x_{13}-x_{23}-x_{33}\end{pmatrix},$$

由此可得

$$\mathrm{Im}\,\sigma=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\a+d&b+e&c+f\end{pmatrix}\middle|\,a,b,c,d,e,f\in P\right\},$$

维$(\mathrm{Im}\ \sigma)=6$,其一组基为

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Ker}\ \sigma=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&0\\a&b&c\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in P\right\},$$

维$(\mathrm{Ker}\ \sigma)=3$,其一组基是

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

解法 2　取 $P^{3\times3}$ 的一组基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{13},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{23},\boldsymbol{E}_{31},\boldsymbol{E}_{32},\boldsymbol{E}_{33}$,其中 E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为 0,其余元素为 1 的 3 阶方阵,则

$$\sigma(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{AE}_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\sigma(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{AE}_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\sigma(\boldsymbol{E}_{13})=\boldsymbol{AE}_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\sigma(\boldsymbol{E}_{21})=\boldsymbol{AE}_{21}=\begin{pmatrix}&0&0&0\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\sigma(\boldsymbol{E}_{22})=\boldsymbol{AE}_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$\sigma(\boldsymbol{E}_{31})=\boldsymbol{AE}_{31}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix},\sigma(\boldsymbol{E}_{31})=\boldsymbol{AE}_{31}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\sigma(\boldsymbol{E}_{32})=\boldsymbol{AE}_{32}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\sigma(\boldsymbol{E}_{33})=\boldsymbol{AE}_{33}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

易知,

$$\mathrm{Im}\ \sigma=L\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\right).$$

维 $\mathrm{Im}\ \sigma=6$,由此可知,维$(\mathrm{Ker}\ \sigma)=3$.

设 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{3\times3}\in\mathrm{Ker}\ \sigma$,则

$$\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}x_{11}-x_{31}&x_{12}-x_{32}&x_{13}-x_{33}\\-x_{21}&-x_{22}&-x_{23}\\x_{11}-x_{21}-x_{31}&x_{12}-x_{22}-x_{32}&x_{13}-x_{23}-x_{33}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

易知，$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}\,\sigma$，且线性无关，故

$$\mathrm{Ker}\,\sigma = L\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right).$$

点评 第 1 种方法是给出 $\mathrm{Im}\,\sigma$ 和 $\mathrm{Ker}\,\sigma$ 中矩阵的形式，从中来确定基和维数，解法 2 是利用 $P^{3\times 3}$ 的基的像，求基像组的极大无关组，得到 $\mathrm{Im}\,\sigma$ 的基和维数，由此可确定 $\mathrm{Ker}\,\sigma$ 的维数，再利用核中矩阵的元素特点确定 $\mathrm{Ker}\,\sigma$ 的基. 第 2 种方法是基本的，但较第 1 种方法麻烦.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-2&-2&2\\3&6&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量，并说明 $\boldsymbol{A}$ 是否与对角矩阵相似. 若与对角矩阵相似，试求可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角形.

解 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&1\\2&\lambda+2&-2\\-3&-6&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3-12\lambda+16=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$，

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-4$，$\lambda_2=2$（2 重）.

对于特征值 $\lambda_1=-4$，解方程组

$$\begin{pmatrix}-7&-2&1\\2&-2&-2\\-3&-6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$.

对于特征值 $\lambda_2=2$，解方程组

$$\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&4&-2\\-3&-6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

由于基础解系含解向量的个数与对应特征值的重数相同，或由于 3 阶方阵

有 3 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.

令 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -2 & 1\\ -\frac{2}{3} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

例 5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，设 k 为正整数，求 $\boldsymbol{A}^k$.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$.

1）当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $-x_1+x_3=0$，

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

2）当 $\lambda_3=1$ 时，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{cases}x_1 & =0,\\ -x_1-x_2+x_3 & =0,\end{cases}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k & & \\ & 2^k & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^k & 0 & 0\\ 2^k-1 & 2^k & -2^k+1\\ 2^k-1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

例 6 已知下列两矩阵相似：

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&y\end{pmatrix},$$

1）求 x,y 的值.

2）求矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

解 1）解法 1

$$|A|=\begin{vmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{vmatrix}=-2(x-2),\quad |B|=\begin{vmatrix}-1&&\\&2&\\&&y\end{vmatrix}=-2y.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,由此可得,$y=x-2$.

$$\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\-2&\lambda-x&-2\\-3&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)).$$

即 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 -2,故得 $y=-2$,从而,$x=0$.

解法 2

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\-2&\lambda-x&-2\\-3&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)),$$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda+1&&\\&\lambda-2&\\&&\lambda-y\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y).$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$,由此得 $y=-2$,且

$$\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)=(\lambda+1)(\lambda-2)=\lambda^2-\lambda-2,$$

因而有 $x+1=1$,即 $x=0$.

2）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值是 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$,

当 $\lambda_1=-1$ 时,齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},$$

当 $\lambda_2=2$ 时,齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

当 $\lambda_3=-2$ 时,齐次线性方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

取
$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}.$$

例 7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

1) 证明 $\boldsymbol{A}^n=-\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}\quad(n\geqslant 3)$;

2) 计算 $\boldsymbol{A}^{103}$ 和 $\boldsymbol{A}^{102}$.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+1)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1.$$

由哈米顿-凯莱定理,

$$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}.\tag{1}$$

1) 由(1).

$$\boldsymbol{A}^m+\boldsymbol{A}^{m-2}=\boldsymbol{A}^{m-1}+\boldsymbol{A}^{m-3}\qquad(m\geqslant 3).$$

因而

$$\boldsymbol{A}^n+\boldsymbol{A}^{n-2}=\boldsymbol{A}^{n-1}+\boldsymbol{A}^{n-3}=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^{n-4}=\cdots=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}.$$

所以 $\boldsymbol{A}^n=-\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}\quad(n\geqslant 3)$.

2)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{103}&=-\boldsymbol{A}^{103-2}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}=-(-\boldsymbol{A}^{103-4}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E})+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{103-4}\\&=-\boldsymbol{A}^{103-6}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}=\cdots=-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

故
$$\boldsymbol{A}^{102}=\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

例 8 设 $\mathbf{R}$ 为实数域,在实线性空间 $\mathbf{R}[X]_n$ 中,$\forall f(x)\in\mathbf{R}[X]_n$,设线性变换 D 和 S_a 为

$$D(f(x))=f'(x),\quad S_a(f(x))=f(x+a),$$

求证 S_a 是 D 的一个多项式.

解 易知 $D^n=0$.

对 $\forall f(x)\in \mathbf{R}[X]_n$，由泰勒展开式

$$f(x+a)=f(x)+af'(x)+\frac{a^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x),$$

于是，

$$S_a(f(x))=f(x+a)=I(f(x))+aD(f(x))+\frac{a^2}{2!}D^2(f(x))+\cdots+$$

$$\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}D^{n-1}(f(x))$$

其中 I 为 $\mathbf{R}[x]_n$ 的恒等变换，故 $S_a(f(x))=I+aD+\frac{a^2}{2!}D^2+\cdots+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}D^{n-1}(f(x))$，

即 $$S_a=I+aD+\frac{a^2}{2!}D^2+\cdots+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}D^{n-2}.$$

例 9 设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换，证明 σ 可逆的充要条件是 σ 无零特征值.

证明 证法 1 由维$(V)=n$ 知，σ 单$\Leftrightarrow\sigma$ 满，故有 σ 可逆$\Leftrightarrow\sigma$ 单$\Leftrightarrow\sigma$ 无零特征值.

证法 2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基，且 σ 在这组基下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，则有 σ 可逆$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

设 λ 为 σ 的特征值，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，由 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，必有 $\lambda\neq 0$，(否则，若 $\lambda=0$，则 $|-\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0$，矛盾)，反之，由 σ 无零特征值，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，从而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

点评 证法 1:利用特征值和特征向量的定义来证明. 证法 2 利用线性变换在某组基下的特征多项式证明.

例 10 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的 n 阶可逆矩阵，证明以下条件等价：

1) $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似；

2) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与对角阵相似；

3) $\boldsymbol{A}^*$ 与对角阵相似，($\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵).

证明 证法 1 1)$\Rightarrow$2) 设 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似，则 $\exists$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{D}$，由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知，$\boldsymbol{D}$ 也可逆，于是有

$$T^{-1}A^{-1}T=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix},$$

即 A^{-1}也与对角阵相似.

2)⇒3)　设 $U=\begin{pmatrix}u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n\end{pmatrix}$,且 A^{-1}与 U 相似,则存在可逆矩阵 Q,使

$$Q^{-1}A^{-1}Q=\begin{pmatrix}u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n\end{pmatrix},$$

于是有

$$A^{-1}=Q\begin{pmatrix}u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n\end{pmatrix}Q^{-1},$$

进而有

$$A^*=|A|A^{-1}=|A|Q\begin{pmatrix}u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n\end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$=Q\begin{pmatrix}|A|u_1 & & & \\ & |A|u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A|u_n\end{pmatrix}Q^{-1},$$

即 A^* 也与对角阵相似.

3)⇒1)　设 $S=\begin{pmatrix}s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n\end{pmatrix}$,且 A^* 与 S 相似. 设可逆阵 K,使

$K^{-1}A^*K=S$，S 可逆，而 $A^*=KSK^{-1}$，$(A^*)^{-1}=KS^{-1}K^{-1}$，因此，

$$A=|A|(A^*)^{-1}=|A|KS^{-1}K^{-1}=K\begin{pmatrix}|A|s_1^{-1} & & & \\ & |A|s_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A|s_n^{-1}\end{pmatrix}K^{-1},$$

即 A 与对角阵相似.

证法 2

1)⇒2) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 P^n 的一组基，$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$，由 A 可逆知，σ 可逆.

令 $\sigma^*=|A|\sigma^{-1}$，由 $A^*=|A|A^{-1}$，则

$$\sigma^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1},$$

$$\sigma^*(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^*,$$

由 A 与对角阵相似，则 σ 有 n 个线性无关的特征向量，设 α 是 σ 的一个特征向量，则 $\exists\lambda\in P$，使 $\sigma(\alpha)=\lambda\alpha=A\alpha$，由 A 可逆，$\lambda\neq0$，因而 $\sigma^{-1}(\alpha)=A^{-1}(\alpha)=\lambda^{-1}\alpha$，即 α 也是 σ^{-1} 的特征向量，这样，σ^{-1} 也有 n 个线性无关的特征向量，即 A^{-1} 也与对角阵相似.

2)⇒3) 设 β 为 σ^{-1} 的特征向量，则 $\exists\mu\in P$，使 $A^{-1}(\beta)=\mu\beta$，$\sigma^*(\beta)=|A|\sigma^{-1}(\beta)=|A|\mu\beta$，因而 β 也是 σ^* 的特征向量，由 σ^{-1} 有 n 个线性无关的特征向量，故 σ^* 也有 n 个线性无关的特征向量，即 A^* 与对角阵相似.

3)⇒1) 设 γ 为 σ^* 的特征向量，$\exists k\neq0\in P$，使 $\sigma^*(\gamma)=k\gamma=A^*\gamma$，由 A^* 可逆，$k\neq0$，$(A^*)^{-1}\gamma=k^{-1}\gamma$，故 $A\gamma=(|A|k^{-1})\gamma$，因而，$\gamma$ 也是 σ 的特征向量，即 σ 有 n 个线性无关的特征向量，所以 A 与对角阵相似.

注：由此题的证明知，$\sigma,\sigma^{-1},\sigma^*$（或 A,A^{-1},A^*）有完全相同的特征向量，而 λ 是 A 的特征值⇔λ^{-1} 是 A 的特征值⇔$|A|\lambda^{-1}$ 是 A^* 的特征值.

点评 证法 1 直接利用矩阵相似的定义证明，证法 2 是将矩阵 A 转化为 P 上线性空间的线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵，利用 A 与对角阵相似当且仅当 σ 有 n 个线性无关的特征向量这一事实证明.

例 11 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，σ 是 V 的可逆的线性变换，W 是 σ 的不变子空间，证 W 也是 σ^{-1} 的不变子空间.

证明 设 W 的基为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，将其扩充为 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$，设

$$\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}A_1 & C\\ 0 & A_2\end{pmatrix},$$

其中 A_1 为 m 阶可逆矩阵，A_2 为 $n-m$ 阶可逆矩阵.

证法 1 $\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}^{-1},$$

由于$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}$,故 W 在σ^{-1}下不变.

证法 2 设 $\sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}$,令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{B}_1$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}_4$ 为 $n-m$ 阶方阵,由于 $\sigma^{-1}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,即

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{E}_{n-m},\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1^{-1},\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}_4=\boldsymbol{A}_2^{-1},\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{0}$,从而

$$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2^{-1},$$

即 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}$,故 W 在σ^{-1}下不变.

点评 证法 1 利用逆变换对应于逆矩阵及分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}^{-1}$的性质证明.证法 2 先设出 σ^{-1}在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$,利用 $\sigma^{-1}\sigma$ 对应于 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 求出 $\boldsymbol{B}$.

例 12 设 P 为数域,$\lambda_i\in P,i=1,\cdots,n$,证明

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\text{与}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}\text{相似},$$

其中 $\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_n}$ 是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的一个排列.

证明 设 $\lambda_{i_k}=\lambda_1$,对 $\boldsymbol{B}$,交换 1 行与 k 行,再交换 1 列与 k 列,即有

$$\boldsymbol{B}\longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_{j_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{j_n}\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_{j_2},\cdots,\lambda_{j_n}$ 是 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的一个排列,也就是说,存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{(1,k)}=\boldsymbol{P}_{(1,k)}^{-1}$,使

$$P_{(1,k)}^{-1}BP_{(1,k)}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_{j_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{j_n}\end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_{j_l}=\lambda_2$,则有

$$P_{(2,l)}^{-1}P_{(1,k)}^{-1}BP_{(1,k)}P_{(2,l)}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_{t_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{t_n}\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_{t_3},\cdots,\lambda_{t_n}$ 是 $\lambda_3,\cdots,\lambda_n$ 的一个排列,如此继续,必有初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$,使

$$P_s^{-1}\cdots P_1^{-1}BP_1\cdots P_s=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

令 $P=P_1\cdots P_s$,则 $P^{-1}BP=A$,故 A 与 B 相似.

例 13 设 σ 是数域P 上线性空间 V 的线性变换,若有 $\xi\in V$,使 $\sigma^{k-1}(\xi)\neq 0$,但 $\sigma^k(\xi)=0$,证明

1) $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$线性无关;

2) 若维$(V)=n$,且 ξ 满足$\sigma^{n-1}(\xi)\neq 0,\sigma^n(\xi)=0$,求 V 的一组基,使 σ 在这组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

证明 1) 设 $x_1\xi+x_2\sigma(\xi)+\cdots+x_k\sigma^{k-1}(\xi)=0$,用 σ^{k-1} 作用等式两边,得 $x_1\sigma^{k-1}(\xi)=0$,由 $\sigma^{k-1}(\xi)\neq 0$,得 $x_1=0$,于是

$$x_2\sigma(\xi)+x_3\sigma^2(\xi)+\cdots+x_k\sigma^{k-1}(\xi)=0.$$

用 $\sigma^{k-2}(\xi)$作用等式两边,得 $x_2\sigma^{k-1}(\xi)=0$,因而 $x_2=0$,类似地可得 $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$线性无关.

2) 若维$(V)=n$,由 1)知,$\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)$是 V 的一组基,由于

$$\begin{aligned}
&\sigma(\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi))\\
&=(\sigma(\xi),\sigma^2(\xi),\cdots,\sigma^n(\xi))=(\sigma(\xi),\sigma^2(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi),0)\\
&=(\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi))\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

故 σ 在基$\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{n-1}(\xi)$下的矩阵满足题设要求.

例 14 设 σ,τ 是 n 维线性空间 V 的线性变换,证明

1) 若 W 是 V 的子空间,则维$(\sigma(W))$+维$(\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap W)$=维$(W)$;

2) $(\sigma\tau)$的秩$\geqslant\sigma$ 的秩$+\tau$ 的秩$-n$;

3) $(\sigma\tau)$的零度$\leqslant\sigma$ 的零度$+\tau$ 的零度.

证明 证法 1 1) 若 $W=\{\mathbf{0}\}$,结论显然成立.

若 $W\neq\{\mathbf{0}\}$,而 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap W=\{\mathbf{0}\}$,令 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 W 的一组基. 设 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mathbf{0}$,则有 $\sigma\left(\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\mathbf{0}$,因而$\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap W$,故$\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}$,从而,$k_i=0,i=1,\cdots,s$. 于是有维$(\sigma(W))$=维$(W)$.

若 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap W\neq\{\mathbf{0}\}$,设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为其基,将它扩充为 W 的基$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$,则

$$\sigma(W)=L(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_r),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_k))=L(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_k)).$$

设$\sum\limits_{i=r+1}^{k}x_i\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mathbf{0}$,则 $\sigma\left(\sum\limits_{i=r+1}^{k}x_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\mathbf{0}$,因而$\sum\limits_{i=r+1}^{k}x_i\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap W=0$,故 $\exists\, x_1,\cdots,x_r\in P$,使$\sum\limits_{i=r+1}^{k}x_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum\limits_{j=1}^{r}x_j\boldsymbol{\alpha}_j$,即$\sum\limits_{i=r+1}^{k}x_i\boldsymbol{\alpha}_i-\sum\limits_{j=1}^{r}x_j\boldsymbol{\alpha}_j=\mathbf{0}$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$线性无关,故有 $x_i=0,i=1,\cdots,k$.因而$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_k)$线性无关,故维$(\sigma(W))=k-r$=维$(W)$-维$(\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap W)$,即

$$维(\sigma(W))+维(\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap W)=维(W).$$

2) 令 $W=\tau(V)$,由 1),我们得到维$(\sigma(\tau(V)))$+维$(\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap\tau(V))$=维$(\tau(V))$.由于维$(\sigma^{-1}(\mathbf{0}))\geqslant$维$(\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap W)$,因而有

$$维(\sigma\tau(V))+维(\sigma^{-1}(\mathbf{0}))\geqslant维(\tau(V)).$$

又由于维$(\sigma^{-1}(\mathbf{0}))=n$-维$(\sigma(V))$,故有

$$维(\sigma\tau(V))+n-维(\sigma(V))\geqslant维(\tau(V)).$$

因而,

$$\sigma\tau\text{ 的秩}\geqslant\sigma\text{ 的秩}+\tau\text{ 的秩}-n.$$

3) $\sigma\tau$ 的秩 $= n - \sigma\tau$ 的零度，

σ 的秩 $= n - \sigma$ 的零度，

τ 的秩 $= n - \tau$ 的零度，

因而，$n - \sigma\tau$ 的零度 $\geqslant n - \sigma$ 的零度 $+ n - \tau$ 的零度 $- n$，

于是

$$\sigma\tau \text{ 的零度} \leqslant \sigma \text{ 的零度} + \tau \text{ 的零度}.$$

对于 2)和 3)，我们还有以下的证明方法.

证法 2

证明 3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一组基，且

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}, \tau(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B},$$

从而，$\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{AB}$.

由于 维$((\sigma\tau)^{-1}(\mathbf{0}))$ = 方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$的解空间的维数 $= n - \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$，

维$(\sigma^{-1}(\mathbf{0}))$ = 方程组 $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$的解空间的维数 $= n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，

维$(\tau^{-1}(\mathbf{0}))$ = 方程组$\boldsymbol{BX} = \mathbf{0}$的解空间的维数 $= n - \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$，

其中 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$. 因而

维$(\sigma^{-1}(\mathbf{0}))$ + 维$(\tau^{-1}(\mathbf{0})) = 2n - (\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}))$.

$$= n - (\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})) + \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) + n - \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}).$$

又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) - n$，故 $n - (\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})) + \mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \geqslant 0$.

因而，维$(\sigma^{-1}(\mathbf{0}))$ + 维$(\tau^{-1}(\mathbf{0})) \geqslant n - \mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$ = 维$((\sigma\tau)^{-1}(\mathbf{0}))$，即

$$\sigma\tau \text{ 的零度} \leqslant \sigma \text{ 的零度} + \tau \text{ 的零度}.$$

2) 由于

$\sigma\tau$ 的零度 $= n - \sigma\tau$ 的秩，σ 的零度 $= n - \sigma$ 的秩，τ 的零度 $= n - \tau$ 的秩，

故有 $$n - \sigma\tau \text{ 的秩} \leqslant n - \sigma \text{ 的秩} + n - \tau \text{ 的秩}.$$

于是 $$\sigma\tau \text{ 的秩} \geqslant \sigma \text{ 的秩} + \tau \text{ 的秩} - n.$$

证法 3

2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一组基，且

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}, \tau(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B},$$

从而，$\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{AB}$. 由第四章知 $(\boldsymbol{AB})$秩 $\geqslant \boldsymbol{A}$ 秩 $+ \boldsymbol{B}$ 秩 $- n$. 又由于

$$(\boldsymbol{AB})\text{秩} = \sigma\tau \text{ 的秩},$$

$$\boldsymbol{A} \text{ 秩} = \sigma \text{ 的秩}, \boldsymbol{B} \text{ 秩} = \tau \text{ 的秩},$$

故有 $$\sigma\tau \text{ 的秩} \geqslant \sigma \text{ 的秩} + \tau \text{ 的秩} - n.$$

同第一种方法一样得到 3).

点评 对于 2)和 3)，证法 1 利用 1)及维数公式证明，证法 2 利用方程组的

解空间的维数证明，证法 3 利用矩阵的秩的结果进行证明.

例 15 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，求一可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角形.

解 由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的每一个列向量是 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，因而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\leqslant n$.

又由于 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，也有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{E})=n$，因此，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=n$. 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=k$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=s$，则 $k+s=n$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的列极大线性无关组，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的列极大线性无关组. 由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是属于特征值 1 的线性无关的特征向量.

由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是属于特征值 2 的线性无关的特征向量. 因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关. 令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$ 则有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&2&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\}r\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}2\\ \ddots\\ 2\end{matrix}}\right\}s\end{matrix}.$$

点评 对 $\forall\,\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$，若有 $(\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，其中 $a\neq b$，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix}a&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&a&&&\\&&&b&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&b\end{pmatrix}$ 相似.

例 16 设 $\sigma_1,\cdots,\sigma_s$ 为线性空间 V 的线性变换，满足

1) $\sigma_i^2=\sigma_i,\ i=1,\cdots,s$,

2) $\sigma_i\sigma_j=0,\ i\neq j,\ i,j=1,\cdots,s$,

则 $$V=\sigma_1(V)\dotplus\sigma_2(V)\dotplus\cdots\dotplus\sigma_s(V)\dotplus\bigcap_{i=1}^{s}\sigma_i^{-1}(\boldsymbol{0}).$$

证明 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}-\sigma_1(\boldsymbol{\alpha})-\sigma_2(\boldsymbol{\alpha})-\cdots-\sigma_s(\boldsymbol{\alpha})$，则有

$$\sigma_i(\boldsymbol{\beta})=\sigma_i(\boldsymbol{\alpha})-\sigma_i(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},\ i=1,\cdots,s.$$

因而 $\boldsymbol{\beta}\in\bigcap_{i=1}^{s}\sigma_i^{-1}(\boldsymbol{0})$. 于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\sigma_1(\boldsymbol{\alpha})+\sigma_2(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\sigma_s(\boldsymbol{\alpha})\in\sigma_1(V)+\sigma_2(V)+\cdots+\sigma_s(V)+\bigcap_{i=1}^{s}\sigma_i^{-1}(\mathbf{0}),$$

故
$$V=\sigma_1(V)+\sigma_2(V)+\cdots+\sigma_s(V)+\bigcap_{i=1}^{s}\sigma_i^{-1}(\mathbf{0}).$$

设 $\sigma_1(\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma_2(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+\sigma_s(\boldsymbol{\alpha}_s)+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$, $\sigma_i(\boldsymbol{\alpha}_i)\in\sigma_i(V_s)$, $\boldsymbol{\gamma}\in\bigcap_{i=1}^{s}\sigma_i^{-1}(\mathbf{0})$, 则 $\sigma_i[\sigma_1(\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma_2(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+\sigma_s(\boldsymbol{\alpha}_s)+\boldsymbol{\gamma}]=\sigma_i(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mathbf{0}$, $i=1,\cdots,s$, 从而也有 $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$, 即$\mathbf{0}$元素分解唯一. 因而,

$$V=\sigma_1(V)\dot{+}\sigma_2(V)\dot{+}\cdots\dot{+}\sigma_s(V)\dot{+}\bigcap_{i=1}^{s}\sigma_i^{-1}(0).$$

例 17 设 P 是数域, V 是 P 上的 n 维线性空间, σ 是 V 的线性变换, 证明下列条件等价:

1) σ 是数乘变换;

2) σ 与 V 的全体线性变换可交换;

3) σ 在任一组基下的矩阵相同.

证明 1) $\Rightarrow$ 2)显然.

2) $\Rightarrow$ 1)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基, 且 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$.

$\forall \boldsymbol{B}\in P^{n\times n}$, 令 $\tau(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}$, 由 $\sigma\tau=\tau\sigma$, 则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 由 $\boldsymbol{B}$ 的任意性, 则有 $\boldsymbol{A}$ 为数量阵, 从而 σ 是数乘变换.

1) $\Rightarrow$ 3)显然.

3) $\Rightarrow$ 1)设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V 的一组基, 则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1},\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j,\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 也是 V 的一组基, $i,j=1,\cdots,n$.

假设 σ 在任一组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由于

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1},\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j,\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ji}),$$

故
$$\begin{aligned}&\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1},\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j,\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\\&=\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ji})\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ji})\\&=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1},\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j,\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ji})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ji}).\end{aligned}$$

于是, $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ji})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ji})=\boldsymbol{A}$, 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ji})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ji})\boldsymbol{A},$$

从而 $\boldsymbol{AE}_{ji}=\boldsymbol{E}_{ji}\boldsymbol{A}$, $i,j=1,\cdots,n$. 因而 $\boldsymbol{A}$ 为数量阵, 即 σ 为数乘变换.

例 18 设 σ,τ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, 且 $\sigma^2=\sigma$, $\tau^2=\tau$, 证明:

1) $(\sigma+\tau)^2=(\sigma+\tau)$的充要条件是 $\sigma\tau=\tau\sigma=0$;

2) $\sigma(V)=\tau(V)$的充要条件是 $\sigma\tau=\tau,\tau\sigma=\sigma$;

3) $\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\tau^{-1}(\mathbf{0})$的充要条件是 $\sigma\tau=\sigma,\tau\sigma=\tau$;

4) 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$,则$(\sigma+\tau-\sigma\tau)^2=\sigma+\tau-\sigma\tau$;

5) 若 $\sigma\tau=\tau\sigma=0$,则

$$(\sigma+\tau)(V)=\sigma(V)+\tau(V),\ (\sigma+\tau)^{-1}(\mathbf{0})=\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap\tau^{-1}(\mathbf{0}).$$

证明 1) 设$(\sigma+\tau)^2=(\sigma+\tau)$,则 $\sigma^2+\sigma\tau+\tau\sigma+\tau^2=\sigma+\sigma\tau+\tau\sigma+\tau=\sigma+\tau$,从而有 $\sigma\tau+\tau\sigma=0$,即 $\sigma\tau=-\tau\sigma$.于是

$$\sigma\tau=\sigma\tau^2=(\sigma\tau)\tau=(-\tau\sigma)\tau=-\tau(\sigma\tau)=-\tau(-\tau\sigma)=\tau\sigma=-\sigma\tau,$$

故 $\sigma\tau=\tau\sigma=0$.

反之,设 $\sigma\tau=\tau\sigma=0$,则$(\sigma+\tau)^2=\sigma^2+\sigma\tau+\tau\sigma+\tau^2=\sigma+\tau$.

2) 设 $\sigma(V)=\tau(V)$,对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V,\tau(\boldsymbol{\alpha})\in\tau(V)=\sigma(V)$,故 $\exists\,\boldsymbol{\beta}\in V$,使 $\tau(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\beta})$,从而 $\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha})=\sigma^2(\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\beta})=\tau(\boldsymbol{\alpha})$,因此 $\sigma\tau=\tau$,同理 $\tau\sigma=\sigma$.

反之,设 $\sigma\tau=\tau,\tau\sigma=\sigma$,对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\sigma(V)$,$\exists\,\boldsymbol{\beta}\in V$,使

$$\boldsymbol{\alpha}=\sigma(\boldsymbol{\beta}),\tau(\boldsymbol{\alpha})=\tau\sigma(\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\in\tau(V),$$

故 $\sigma(V)\subseteq\tau(V)$,同理 $\tau(V)\subseteq\sigma(V)$,因而 $\sigma(V)=\tau(V)$.

3) 设 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\tau^{-1}(\mathbf{0})$,$\varepsilon$ 为 V 的恒等变换.$\forall\,\alpha\in V$ 由$\sigma^2=\sigma$ 则

$$\sigma(\sigma-\varepsilon)(\boldsymbol{\alpha})=\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})-\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})-\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},$$

从而$(\sigma-\varepsilon)\boldsymbol{\alpha}\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\tau^{-1}(\mathbf{0})$,于是 $\tau(\sigma-\varepsilon)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,即有 $\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\tau(\boldsymbol{\alpha})$,故 $\tau\sigma=\tau$,同理 $\sigma\tau=\sigma$.

反之,设 $\tau\sigma=\tau,\sigma\tau=\sigma$.对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$,则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.从而 $\tau(\boldsymbol{\alpha})=\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$,故 $\boldsymbol{\alpha}\in\tau^{-1}(\mathbf{0})$,即 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})\subseteq\tau^{-1}(\mathbf{0})$.

同理 $\tau^{-1}(\mathbf{0})\subseteq\sigma^{-1}(\mathbf{0})$,故 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\tau^{-1}(\mathbf{0})$.

4) 由 $\sigma\tau=\tau\sigma$,直接计算可得.

5) 设 $\sigma\tau=\tau\sigma=0$.$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in(\sigma+\tau)(V)$,则 $\exists\,\boldsymbol{\beta}\in V$,使

$$\boldsymbol{\alpha}=(\sigma+\tau)\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\beta})+\tau(\boldsymbol{\beta})\in\sigma(V)+\tau(V).$$

反之,$\forall\,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\sigma(V)+\tau(V)$,$\boldsymbol{\alpha}\in\sigma(V)$,$\boldsymbol{\beta}\in\tau(V)$,则 $\exists\,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1\in V$,使

$$\boldsymbol{\alpha}=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\quad \boldsymbol{\beta}=\tau(\boldsymbol{\beta}_1),$$

由 $\sigma\tau=\tau\sigma=0$,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}&=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\tau(\boldsymbol{\beta}_1)=\sigma^2(\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma\tau(\boldsymbol{\beta}_1)+\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\tau^2(\boldsymbol{\beta}_1)\\&=\sigma(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\tau(\boldsymbol{\beta}_1))+\tau(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\tau(\boldsymbol{\beta}_1))\\&=(\sigma+\tau)(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\tau(\boldsymbol{\beta}_1))\in(\sigma+\tau)(V),\end{aligned}$$

故有$(\sigma+\tau)(V)=\sigma(V)+\tau(V)$.

显然有 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap\tau^{-1}(\mathbf{0})\subseteq(\sigma+\tau)^{-1}(\mathbf{0})$.

对 $\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in (\sigma+\tau)^{-1}(\mathbf{0})$，则 $(\sigma+\tau)\boldsymbol{\alpha}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\tau(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，从而 $\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})+\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，由 $\sigma\tau=0$ 于是有 $\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，即有 $\boldsymbol{\alpha}\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$.

同理 $\boldsymbol{\alpha}\in\tau^{-1}(\mathbf{0})$，故即 $(\sigma+\tau)^{-1}(\mathbf{0})\subseteq\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap\tau^{-1}(\mathbf{0})$.

因此，$(\sigma+\tau)^{-1}(\mathbf{0})=\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap\tau^{-1}(\mathbf{0})$.

例 19 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，且 $\sigma^2=\varepsilon$（ε 是 V 的恒等变换）. 证明，对 V 中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\exists\, \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V$，使 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=-\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 可唯一的表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 之和（即 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 表示唯一）.

证明 $\forall\, \boldsymbol{\alpha}\in V$，设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{2}(\varepsilon+\sigma)\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{2}(\varepsilon-\sigma)\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{2}(\varepsilon+\sigma)\boldsymbol{\alpha}+\frac{1}{2}(\varepsilon-\sigma)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，而且

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=\sigma\left(\frac{1}{2}(\varepsilon+\sigma)\boldsymbol{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\frac{1}{2}\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}$$
$$=\frac{1}{2}(\varepsilon+\sigma)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=\sigma\left(\frac{1}{2}(\varepsilon-\sigma)\boldsymbol{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{\alpha})-\frac{1}{2}\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{\alpha})-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}$$
$$=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{\alpha}+\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=-\frac{1}{2}(\varepsilon-\sigma)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}_2,$$

设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$，且 $\sigma(\boldsymbol{\beta}_1)=\boldsymbol{\beta}_1$，$\sigma(\boldsymbol{\beta}_2)=-\boldsymbol{\beta}_2$，则

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\beta}_1)+\sigma(\boldsymbol{\beta}_2)=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2.$$

于是，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$，

两边相加，得 $2\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\beta}_1$，因而，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1$. 进而有 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2$. 即，$\boldsymbol{\alpha}$ 可唯一地表示成 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 之和.

例 20 设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，且 $\sigma^2=\sigma$，证明：

1) $\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{\xi}-\sigma(\boldsymbol{\xi})\mid\boldsymbol{\xi}\in V\}$；

2) $V=\sigma^{-1}(\mathbf{0})\dotplus\sigma(V)$；

3) 若 τ 是 V 的一个线性变换，则 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 和 $\sigma(V)$ 都在 τ 之下不变的充要条件是 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

证明 1) $\forall\, \boldsymbol{\xi}\in V$，$\sigma(\boldsymbol{\xi}-\sigma(\boldsymbol{\xi}))=\sigma(\boldsymbol{\xi})-\sigma^2(\boldsymbol{\xi})=\sigma(\boldsymbol{\xi})-\sigma(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$. 因此，$\boldsymbol{\xi}-\sigma(\boldsymbol{\xi})\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$.

反之，设 $\boldsymbol{\alpha}\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$，则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，因而 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\sigma(\boldsymbol{\alpha})$，故有

$$\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{\xi}-\sigma(\boldsymbol{\xi})\mid\boldsymbol{\xi}\in V\}.$$

2) $\forall\, \boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}-\sigma(\boldsymbol{\alpha}))+\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})+\sigma(V)$，因此，$V=\sigma^{-1}(\mathbf{0})+\sigma(V)$.

设 $\boldsymbol{\beta}\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap\sigma(V)$，则 $\sigma(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$，且 $\exists\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，使 $\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})$，因此，

$$\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma^2(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}.$$

于是 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})\cap\sigma(V)=\{\mathbf{0}\}$，即有 $V=\sigma^{-1}(\mathbf{0})\dot{+}\sigma(V)$.

3) 设 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 和 $\sigma(V)$ 都在 τ 之下不变，则 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，由 2)，$\exists\,\boldsymbol{\beta}\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$，$\boldsymbol{\gamma}\in\sigma(V)$，使 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$. 由于 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 和 $\sigma(V)$ 都在 τ 之下不变，则 $\tau(\boldsymbol{\beta})\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$，$\tau(\boldsymbol{\gamma})\in\sigma(V)$. 于是，$\sigma(\tau(\boldsymbol{\beta}))=\sigma\tau(\boldsymbol{\beta})=0$，$\sigma(\tau(\boldsymbol{\gamma}))=\tau(\boldsymbol{\gamma})$，因此

$$\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha})=\sigma\tau(\boldsymbol{\beta})+\sigma\tau(\boldsymbol{\gamma})=\tau(\boldsymbol{\gamma}).$$

由于 $\boldsymbol{\beta}\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$，$\boldsymbol{\gamma}\in\sigma(V)$，所以 $\sigma(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$，$\sigma(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\gamma}$，因而

$$\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\tau\sigma(\boldsymbol{\beta})+\tau\sigma(\boldsymbol{\gamma})=\tau(\boldsymbol{\gamma}).$$

于是有 $\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha})=\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha})$，因此，$\sigma\tau=\tau\sigma$.

反之，设 $\sigma\tau=\tau\sigma$. $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$，则 $\sigma(\tau(\boldsymbol{\alpha}))=\tau(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=\mathbf{0}$，所以 $\tau(\boldsymbol{\alpha})\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$，即 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 在 τ 之下不变.

$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\sigma(V)$，由 $\sigma^2=\sigma$，则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$，从而 $\tau(\boldsymbol{\alpha})=\tau(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=\sigma(\tau(\boldsymbol{\alpha}))$，因此 $\tau(\boldsymbol{\alpha})\in\sigma(V)$，即 $\sigma(V)$ 在 τ 之下不变.

例 21 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，σ 是 V 的线性变换，$\sigma\neq a\varepsilon$（$\forall\,a\in P$，ε 为 V 的恒等变换），$g(x)=x^2-4$ 而且 $g(\sigma)=0$. 证明：

1) 2 和 -2 都是 σ 的特征值；

2) $V=V_2\dot{+}V_{-2}$.

证明 1) 证法 1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一组基，且 σ 在这组基下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，由 $g(\sigma)=0$，则 $g(\boldsymbol{A})=\mathbf{0}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$，由于 $\sigma\neq a\varepsilon$，则有 $\boldsymbol{A}\neq a\boldsymbol{E}$，$\forall\,a\in P$. 于是知 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\neq0$，$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\neq\mathbf{0}$.

因而，方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 和 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 都有非 $\mathbf{0}$ 解. 故有 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$，$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$，即 $|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，$|-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

因此，2 和 -2 是 σ 的特征值.

证法 2 $g(\sigma)=(\sigma-2\varepsilon)(\sigma+2\varepsilon)=0$，由 $\sigma\neq a\varepsilon$，$\forall\,a\in P$，故 $\sigma+2\varepsilon\neq0$，因而 $\exists\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，使 $(\sigma+2\varepsilon)\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

令 $\boldsymbol{\beta}=(\sigma+2\varepsilon)\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，由于 $(\sigma-2\varepsilon)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，即 $\sigma\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$.

因此，2 是 σ 的特征值. 同理 -2 也是 σ 的特征值.

2) 由 1) 的第一种方法，$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$，且 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\mathbf{0}$，即 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$，于是

$$\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant n.$$

再由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})-(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=4\boldsymbol{E}$，则

$$\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant n.$$

即有 $\mathrm{r}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$. 因而，维$(V_2)$+维$(V_{-2})=n$. 故 $V=V_2\dot{+}V_{-2}$.

点评 1)的证法1利用齐次方程组的理论,证明了2和-2是$\boldsymbol{A}$的特征值.证法2通过$\sigma\neq a\varepsilon$,由特征值的定义证明了2和-2是$\boldsymbol{\alpha}$的特征值.

例22 设V是数域P上n维线性空间,σ,τ是V的两个线性变换,σ在P上有n个互异的特征值,则有

1) σ的特征向量都是τ的特征向量的充要条件是$\sigma\tau=\tau\sigma$;

2) 若$\sigma\tau=\tau\sigma$,则τ是$\varepsilon,\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n-1}$的线性组合,其中$\varepsilon$为$V$的恒等变换.

证明 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\sigma$的$n$个互异的特征值,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$\sigma$的分别属于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的特征向量.由于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$互异,因此,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间$V$的一组基.

1) 证法1 若每个$\boldsymbol{\alpha}_i$都是τ的特征向量,则$\exists\mu_i\in P$,使$\tau(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i$,$i=1,\cdots,n$.于是

$$\begin{aligned}\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha}_i)&=\sigma(\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i)=\mu_i\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mu_i\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i(\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i)\\&=\lambda_i(\tau(\boldsymbol{\alpha}_i))=\tau(\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i)=\tau(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i))=\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i),i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一组基,因此$\sigma\tau=\tau\sigma$.

反之,设$\sigma\tau=\tau\sigma$,对每一个$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\sigma(\tau(\boldsymbol{\alpha}_i))=(\sigma\tau)\boldsymbol{\alpha}_i=(\tau\sigma)\boldsymbol{\alpha}_i=\tau(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i))=\tau(\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i)=\lambda_i(\tau(\boldsymbol{\alpha}_i)),$$

于是$\tau(\boldsymbol{\alpha}_i)\in V_{\lambda_i}$.由于维$(V_{\lambda_i})=1$,故,$\exists\mu_i\in P$,使$\tau(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i$,$i=1,2,\cdots,n$.故$\boldsymbol{\alpha}_i$也是$\tau$的特征向量,$i=1,2,\cdots,n$.因此,$\sigma$的特征向量也是$\tau$的特征向量.

证法2 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$为线性空间$V$的一组基,且$\sigma$在这组基下的矩阵为$\boldsymbol{A}$,由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$\sigma$的分别属于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的$n$个线性无关的特征向量(不妨设为列向量),因此,令$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,则有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&\\&\lambda_2&&&\\&&\ddots&&\\&&&\ddots&\\&&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

设τ在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵为$\boldsymbol{B}$,由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$也是$\tau$的$n$个线性无关的特征向量.因而,$\exists\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\in P$,使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\mu_1&&&&\\&\mu_2&&&\\&&\ddots&&\\&&&\ddots&\\&&&&\mu_n\end{pmatrix}.$$

于是有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{ABT} &= (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BAT}.
\end{aligned}
$$

因此,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,即有 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

反之,设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V 的基,而且

$$
\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A},
$$

$$
\tau(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{B}.
$$

令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,则有

$$
\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.
$$

由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则有

$$
(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT})=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{ABT}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BAT}=(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}).
$$

设

$$
\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},
$$

则

$$
\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11}\lambda_1 & x_{12}\lambda_2 & \cdots & x_{1n}\lambda_n \\ x_{21}\lambda_1 & x_{22}\lambda_2 & \cdots & x_{2n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}\lambda_1 & x_{n2}\lambda_2 & \cdots & x_{nn}\lambda_n \end{pmatrix},
$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{11}\lambda_1 & x_{12}\lambda_1 & \cdots & x_{1n}\lambda_1 \\ x_{21}\lambda_2 & x_{22}\lambda_2 & \cdots & x_{2n}\lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}\lambda_n & x_{n2}\lambda_n & \cdots & x_{nn}\lambda_n\end{pmatrix}.$$

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异，故 $x_{ij}=0$，当 $i\neq j$，即

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix}x_{11} & & & \\ & x_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{nn}\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_n) = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix}x_{11} & & & \\ & x_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{nn}\end{pmatrix}$$

$$= (x_{11}\boldsymbol{\alpha}_1, x_{22}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,x_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n).$$

因而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_i = x_{ii}\boldsymbol{\alpha}_i$，$i=1,\cdots,n$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 也是 σ 的特征向量，$i=1,\cdots,n$.

2) 假设 $\sigma\tau=\tau\sigma$，由 1)，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 也是 τ 的特征向量，$i=1,\cdots,n$，因而，$\exists\,\mu_i\in P$，使 $\tau(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i$，$i=1,\cdots,n$，于是有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

$$\tau(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}.$$

考虑方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda_1x_2+\cdots+\lambda_1^{n-1}x_n=\mu_1\\ x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_2^{n-1}x_n=\mu_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_1+\lambda_nx_2+\cdots+\lambda_n^{n-1}x_n=\mu_n\end{cases}\tag{1}$$

由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0.$$

于是方程组(1)有唯一解,设为$(a_0,a_1,\cdots,a_n)'$,

即
$$a_0+a_1\lambda_i+\cdots+a_n\lambda_i^{n-1}=\mu_i,i=1,2,\cdots,n.$$

于是
$$(a_0+a_1\lambda_i+\cdots+a_n\lambda_i^{n-1})\boldsymbol{\alpha}_i=\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i,i=1,2,\cdots,n.$$

由 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\tau(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mu_i\boldsymbol{\alpha}_i$,则

$$(a_0\varepsilon+a_1\sigma+a_2\sigma^2+\cdots+a_n\sigma^{n-1})\boldsymbol{\alpha}_i=\tau(\boldsymbol{\alpha}_i),\ i=1,2,\cdots,n.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基,因此

$$\tau=a_0\varepsilon+a_1\sigma+a_2\sigma^2+\cdots+a_n\sigma^{n-1}.$$

点评 证明 1)中的证法 1 直接利用线性变换的定义,即两个线性变换相等的判别进行证明,而证法 2 是利用线性变换 σ 和 τ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,由 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角形,及相似对角形对角线上的元素互异,再利用 $\sigma\tau$ 和 $\tau\sigma$ 的对应矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 相似,得到 $\boldsymbol{B}$ 也是对角形,由此得到要证结果.

例 23 设 $\mathbf{Q}$ 为有理数域,V 是 $\mathbf{Q}$ 上的线性空间,σ 是 V 的线性变换,设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V,\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,且 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta},\sigma(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\gamma},\sigma(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

证明:$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关.

证明 首先证 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.否则,由 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性表示,不妨设 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$,从而有

$$\boldsymbol{\gamma}=\sigma(\boldsymbol{\beta})=\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k(\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=k\boldsymbol{\beta}=k^2\boldsymbol{\alpha},$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\gamma})=k^2\sigma(\boldsymbol{\alpha})=k^2\boldsymbol{\beta}=k^3\boldsymbol{\alpha}$.

又因 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\alpha}$,故$(k^3-k-1)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,由 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$知 $k^3-k-1=0$,与 $x^3-x-1=0$ 无有理根矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

下证 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关.

若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关,由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,所以$\exists k,l\in\mathbf{Q}$,使 $\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}$,因而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}&=\sigma(\boldsymbol{\gamma})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})+l\sigma(\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\beta}+l\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\beta}+l(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})\\&=k\boldsymbol{\beta}+kl\boldsymbol{\alpha}+l^2\boldsymbol{\beta}=kl\boldsymbol{\alpha}+(k+l^2)\boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

即$(kl-1)\boldsymbol{\alpha}+(k+l^2-1)\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$,由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,则 $kl=1,k+l^2=1$,也有 $l^3+kl=l,kl=1$,从而 $l^3-l+1=0$,与 $x^3-x-1=0$ 无有理根矛盾.

例 24 设 W_1,W_2 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的两个子空间,而且维(W_1)+维$(W_2)=n$,证明:存在线性变换 σ,使 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})=W_1,\sigma(V)=W_2$.

证明 设维$(W_1)=r$,则维$(W_2)=n-r=s$.

若 $r=0$,取 $\sigma=\varepsilon$(V 的恒等变换).若 $s=0$,取 $\sigma=0$(V 的零变换).若 $0<r<n$,在 W_1中取一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,将其扩充为 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,在 W_2中取一组基 $\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,令

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\begin{cases}\mathbf{0}, & 1\leqslant i\leqslant r,\\ \boldsymbol{\beta}_i & r+1\leqslant i\leqslant n.\end{cases}$$

易知 σ 是 V 的线性变换,且有

$$\sigma(V)=L(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n))=L(\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=W_2.$$

由于 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i \mid \sigma\left(\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\mathbf{0}\right\}$,设 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$,则

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{i=r+1}^{n}k_i\boldsymbol{\beta}_i=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是 W_2的一组基,则 $k_i=0,i=r+1,\cdots,n$,因而

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\in W_1,\quad \text{即 } \sigma^{-1}(\mathbf{0})\subseteq W_1.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{j=1}^{r}l_j\boldsymbol{\alpha}_j\in W_1$,由 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mathbf{0}$, $i=1,\cdots,r$,因而 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$,即 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{j=1}^{r}l_j\boldsymbol{\alpha}_j\in\sigma^{-1}(\mathbf{0})$,即 $W_1\subseteq\sigma^{-1}(\mathbf{0})$,故有 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})=W_1$.

例 25 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的一个线性变换,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$是 σ 的互不相同的特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$分别是 σ 的属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$的特征向量,若 W 是 σ 的不变子空间,并且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_k\in W$,证明:维($W$)$\geqslant k$.

证明 设 $f_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})^{r_{i-1}}(\lambda-\lambda_{i+1})^{r_{i+1}}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$,由 W 是 σ 的不变子空间知 W 也是 $f_i(\sigma)$ 的不变子空间.由于 $\boldsymbol{\beta}\in W$,故 $f_i(\sigma)(\boldsymbol{\beta})\in W,i=1,\cdots,k$,即 $f_i(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+f_i(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}_k)\in W$.

由于 $(\sigma-\lambda_i I)\boldsymbol{\alpha}_i=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)-\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)-\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mathbf{0}$,所以 $f_i(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}_j)=\mathbf{0}$, $i\neq j$.因而,$f_i(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}_i)=f_i(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_k)=f_i(\sigma)(\boldsymbol{\beta})\in W,i=1,\cdots,k$.

由于 $((\lambda-\lambda_i)^{r_i},f_i(\lambda))=1$,故 $\exists\, u_i(\lambda),v_i(\lambda)\in P[\lambda]$,使

$$u_i(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{r_i}+v_i(\lambda)f_i(\lambda)=1,$$

于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_i&=(u_i(\sigma)(\sigma-\lambda_i I)^{r_i}+v_i(\sigma)f_i(\sigma))(\boldsymbol{\alpha}_i)\\&=u_i(\sigma)(\sigma-\lambda_i I)^{r_i}(\boldsymbol{\alpha}_i)+v_i(\sigma)f_i(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}_i)\\&=v_i(\sigma)f_i(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}_i)\in W,\ i=1,\cdots,k.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$线性无关,且均属于 W,故维(W)$\geqslant k$.

例 26 设 C 是复数域上的线性空间，σ,τ 是 V 的两个线性变换，且 $\sigma\tau=\tau\sigma$，证明：

1）如果 λ_0 是 σ 的特征值，则 V_{λ_0} 是 τ 的不变子空间；

2）σ,τ 至少有一个公共的特征向量.

证明 1）$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V_{\lambda_0}$，$\sigma(\tau(\boldsymbol{\alpha}))=\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha})=\tau(\lambda_0\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0(\tau(\boldsymbol{\alpha}))$，因而 $\tau(\boldsymbol{\alpha})\in V_{\lambda_0}$，即 V_{λ_0} 是 τ 的不变子空间.

2）$\tau|_{V_{\lambda_0}}$ 是 V_{λ_0} 的一个线性变换，在复数域 C 上，$\tau|_{V_{\lambda_0}}$ 必有特征值 λ_1，故 $\exists\boldsymbol{\alpha}\in V_{\lambda_0}$，$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，使 $\tau(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_1(\boldsymbol{\alpha})$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}\in V_{\lambda_0}$，故有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 σ 和 τ 的公共的特征向量.

例 27 证明数域 P 上的任何 n 维线性空间的真子空间均可表示为若干个 $n-1$ 维子空间的交.

证明 设 V 为 P 上的线性空间，W 为其真子空间.

若维$(W)=n-1$，则结论正确.

设维$(W)=r\leqslant n-2$，令 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 为 W 的基，扩充为 V 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 令

$$W_1=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}),$$
$$W_2=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+\boldsymbol{\varepsilon}_n,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$W_{n-r}=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}+\boldsymbol{\varepsilon}_n),$$

则 $W\subseteq W_i$，$i=1,\cdots,n-1$，从而 $W\subseteq\bigcap\limits_{i=1}^{n-r}W_i$，对任意的 $\alpha\in\bigcap\limits_{i=1}^{n-r}W_i$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}\\&=l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+l_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+l_{r+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+\boldsymbol{\varepsilon}_n)+\cdots+l_{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}.\end{aligned}$$

从而有 $l_{r+1}=0$，$k_{r+1}=0$.

用同样的方法可得 $k_{r+2}=\cdots=k_{n-1}=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\varepsilon}_r\in W$，故 $W=\bigcap\limits_{i=1}^{n-r}W_i$.

例 28 **C 为复数域，$\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，证明 A 与对角阵相似的充分必要条件是对于任意的 $\lambda\in\mathbf{C}$，$\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 与 $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})^2$ 有相同的秩.**

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似，则存在可逆阵 $\boldsymbol{T}$，使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&0\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

所以 $\forall\lambda\in\mathbf{C}$,有 $$\boldsymbol{T}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda-\lambda_n\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}(\lambda-\lambda_1)^2 & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda-\lambda_n)^n\end{pmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{T}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{T}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2\boldsymbol{T}$ 等秩. 由 $\boldsymbol{T}$ 可逆知,$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2$等秩.

反之,设对每个 $\lambda\in\mathbf{C}$,$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2$等秩. 由于 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$,故 $\boldsymbol{A}$ 与若尔当形矩阵相似,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{J}_i$ 为若尔当块,$i=1,\cdots,s$,若某个 $\boldsymbol{J}_i$ 不是对角形(即 $\boldsymbol{J}_i$ 不是 1 级的),不妨设为 $\boldsymbol{J}_1$,即

$$\boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ 1 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_1\end{pmatrix}_{k_1},\ k_1\geqslant 2,\text{故}$$

$$\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix},(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_1)^2=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此知$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_1)^2$的秩小于 $\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}_1$的秩,因而 $\boldsymbol{T}^{-1}(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2\boldsymbol{T}$ 的秩小于 $\boldsymbol{T}^{-1}(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}$ 的秩,进而$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2$的秩小于 $\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩,矛盾. 故每个 $\boldsymbol{J}_i$ 为对角形,从而 $$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix}$$ 为对角形($s=n$).

例 29 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$($\mathbf{C}$ 为复数域),$f(\lambda)$为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式,证明 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$(不用哈密顿－凯莱定理).

证明 设 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$，设 T 为 $\mathbf{C}$ 上可逆矩阵，使 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix}$，其中 $J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&&&\\1&\lambda_i&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&\lambda_i\end{pmatrix}$ 为若尔当块. 于是

$$f(T^{-1}AT)=(T^{-1}AT)^n+a_{n-1}(T^{-1}AT)^{n-1}+\cdots+a_1T^{-1}AT+a_0E$$
$$=\begin{pmatrix}f(J_1)&&&\\&f(J_2)&&\\&&\ddots&\\&&&f(J_s)\end{pmatrix}.$$

而
$$f(J_i)=\begin{pmatrix}f(\lambda_i)&&&&\\b_{i1}f'(\lambda_i)&\ddots&&&\\&&\ddots&&\\\vdots&&&\ddots&\\b_{i,k_{i-1}}f^{(k_i-1)}(\lambda_i)&\cdots&&b_{i1}f'(\lambda_i)&f(\lambda_i)\end{pmatrix},$$

λ_i 为 $f(\lambda)$ 的 k_i 重根. 故 $f(\lambda_i)=0,f'(\lambda_i)=0,\cdots,f^{(k_i-1)}(\lambda_i)=0,f(J_i)=\mathbf{0}$，于是 $f(T^{-1}AT)=\mathbf{0}$，进而有 $f(A)=\mathbf{0}$.

例 30 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，σ 是 V 的线性变换，σ 在某组基下的矩阵为对角阵. $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为 σ 的全部互不同的特征值，证明存在线性变换 $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$，使

1) $\sigma_1+\cdots+\sigma_r=\varepsilon$（$\varepsilon$ 是 V 的恒等变换）；

2) $\lambda_1\sigma_1+\cdots+\lambda_r\sigma_r=\sigma$；

3) $\sigma_i\sigma_j=0,i\neq j,i,j=1,\cdots,r$；

4) $\sigma_i^2=\sigma_i,i=1,\cdots,r$；

5) $\sigma_i(V)=V_{\lambda_i},i=1,\cdots,r$.

证明 由已知，$V=V_{\lambda_1}\dotplus\cdots\dotplus V_{\lambda_r}$，对 $\forall\,\alpha\in V$，设 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_r$，$\alpha_i\in V_{\lambda_i}$，令 $\sigma_i(\alpha)=\alpha_i$，则 σ_i 是 V 的线性变换.

1) $(\sigma_1+\cdots+\sigma_r)\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_r=\alpha$，故有 $\sigma_1+\cdots+\sigma_r=\varepsilon$.

2) $(\lambda_1\sigma_1+\cdots+\lambda_r\sigma_r)\alpha=\lambda_1\sigma_1(\alpha)+\cdots+\lambda_r\sigma_r(\alpha)=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r$
$=\sigma(\alpha_1)+\cdots+\sigma(\alpha_r)=\sigma(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)=\sigma(\alpha)$，

故有 $\lambda_1\sigma_1+\cdots+\lambda_r\sigma_r=\sigma$.

3) $\sigma_i\sigma_j(\boldsymbol{\alpha})=\sigma_i(\boldsymbol{\alpha}_j)=\mathbf{0}, i\neq j$,故 $\sigma_i\sigma_j=0$.

4) $\sigma_i^2(\boldsymbol{\alpha})=\sigma_i(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\alpha}_i=\sigma_i(\boldsymbol{\alpha}), i=1,\cdots,n$,故 $\sigma_i^2=\sigma_i$.

5) $\forall\sigma_i(\boldsymbol{\beta})\in\sigma_i(V), \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\boldsymbol{\beta}_r, \boldsymbol{\beta}_j\in V_{\lambda_j}, \sigma_i(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}_i\in V_{\lambda_i}$,因而 $\sigma_i(V)\subseteq V_{\lambda_i}$, $\forall\boldsymbol{\beta}\in V_{\lambda_i}, \boldsymbol{\beta}=\sigma_i(\boldsymbol{\beta})\in\sigma_i(V)$,也有 $V_{\lambda_i}\subseteq \mathrm{Im}\sigma_i$,故有 $V_{\lambda_i}=\sigma_i(V)$.

例 31 设 σ 是数域P 上线性空间 V 的线性变换,以下结论成立:

1) 若 $f(x),g(x)\in P[x]$,且 $f(x)=g(x)h(x),(g(x),h(x))=1$,则

$$f^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})=g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})\dotplus h^{-1}(\sigma)(\mathbf{0});$$

2) 若 $f(x),f_1(x),\cdots,f_s(x)\in P[x]$,且 $f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x), f_1(x),\cdots,f_s(x)$两两互素,则 $f^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})=f_1^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})\dotplus\cdots\dotplus f_s^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})$.

证明 1) 由$(g(x),h(x))=1$, $\exists u(x),v(x)\in P[x]$,使 $g(x)u(x)+h(x)v(x)=1$,从而

$$g(\sigma)u(\sigma)+h(\sigma)v(\sigma)=\varepsilon,(\varepsilon\text{ 为的恒等变换}).$$

对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in f^{-1}(\sigma)(\mathbf{0}), \boldsymbol{\alpha}=\varepsilon(\alpha)=g(\sigma)u(\sigma)(\boldsymbol{\alpha})+h(\sigma)v(\sigma)(\boldsymbol{\alpha})$,由 $f(\sigma)=g(\sigma)h(\sigma)$,则 $h(\sigma)g(\sigma)u(\sigma)(\boldsymbol{\alpha})=f(\sigma)u(\sigma)(\boldsymbol{\beta})=u(\sigma)(f(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}))=\mathbf{0}$,于是

$$g(\sigma)u(\sigma)(\boldsymbol{\alpha})\in h^{-1}(\sigma)(\mathbf{0}).$$

同理 $h(\sigma)v(\sigma)(\boldsymbol{\alpha})\in g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})$,因此

$$(g(\sigma)u(\sigma)+h(\sigma)v(\sigma))\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\in h^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})+g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0}),$$

即 $f^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})\subseteq g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})+h^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})$.

反之,设 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})+h^{-1}(\sigma)(\mathbf{0}), \boldsymbol{\alpha}\in g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0}), \boldsymbol{\beta}\in h^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})$,

$$\begin{aligned}f(\sigma)(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=g(\sigma)h(\sigma)(\boldsymbol{\alpha})+g(\sigma)h(\sigma)(\boldsymbol{\beta})\\&=h(\sigma)(g(\sigma)\boldsymbol{\alpha})+g(\sigma)(h(\sigma)\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0},\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in f^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})$,于是有 $f^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})=g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})+h^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})$.

设 $\boldsymbol{\alpha}\in g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})\cap h^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})$,则 $g(\sigma)\boldsymbol{\alpha}=h(\sigma)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,因而

$$\boldsymbol{\alpha}=\varepsilon(\boldsymbol{\alpha})=g(\sigma)u(\sigma)(\boldsymbol{\alpha})+h(\sigma)v(\sigma)(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},$$

即 $g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})\cap h^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$.因此 $f^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})=g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})\dotplus h^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})$.

2) 对 s 用数学归纳法.

当 $s=2$ 时,由 1)结论成立.

假设结论对 $s-1$ 时成立,下证结论对 s 也成立.由于 $f_1(x),\cdots,f_s(x)$两两互素,因而

$$(f_1(x)\cdots f_{s-1}(x),f_s(x))=1,$$

令 $g(x)=f_1(x)\cdots f_{s-1}(x)$,由 1)得

$$f^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})=g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})\dotplus f_s^{-1}(\sigma)(\mathbf{0}),$$

由归纳假设

$$g^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})=f_1^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})\dotplus\cdots\dotplus f_{s-1}^{-1}(\sigma)(\mathbf{0}),$$

因此，$f^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})=f_1^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})\dotplus\cdots\dotplus f_s^{-1}(\sigma)(\mathbf{0})$.

例 32 设 σ 是数域P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换，证明：

1) 在 $P[x]$中有一次数$\leqslant n^2$的多项式 $f(x)$，使 $f(\sigma)=0$；

2) $f(x),g(x)\in P[x]$，且$(f(x),g(x))=d(x)$，若 $f(\sigma)=g(\sigma)=0$，则

$$d(\sigma)=0;$$

3) σ 可逆的充要条件是有一常数项不为 0 的多项式 $f(x)$，使 $f(\sigma)=0$.

证明 1) 令 $L(V)$是 V 上的全体线性变换构成的数域P 上的线性空间，由于 $L(V)\cong P^{n\times n}$，故维$(L(V))=n^2$，因而 $\varepsilon,\sigma,\sigma^2,\cdots,\sigma^{n^2}$ 线性相关，故 $\exists P$ 上不全为 0 的数 $a_0,a_1,\cdots,a_{n^2}$，使 $\sum\limits_{i=0}^{n^2}a_i\sigma^i=0$.

令 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n^2}a_ix^i$，则 $f(x)$的次数$\leqslant n^2$，且有 $f(\sigma)=0$.

2) 由$(f(x),g(x))=d(x)$，则 $\exists\, u(x),v(x)\in P[x]$，使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$，于是有

$$f(\sigma)u(\sigma)+g(\sigma)v(\sigma)=d(\sigma),$$

由 $f(\sigma)=g(\sigma)=0$，则有 $d(\sigma)=0$.

3) 设 σ 可逆，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$为 V 的一组基，且 σ 在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式$f(x)=|x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，使 $f(\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$，由 $L(V)\cong P^{n\times n}$，故 $f(\sigma)=0$，由于 σ 可逆，$f(x)$无 0 根，故 $a_0\neq0$.

反之，设 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0\,(a_0\neq0)$，使 $f(\sigma)=0$，即

$$a_m\sigma^m+a_{m-1}\sigma^{m-1}+\cdots+a_1\sigma+a_0\varepsilon=0,$$

于是，

$$\begin{aligned}&\sigma(-a_0^{-1}(a_m\sigma^{m-1}+a_{m-1}\sigma^{m-2}+\cdots+a_2\sigma+a_1\varepsilon))\\&=-a_0^{-1}(a_m\sigma^m+a_{m-1}\sigma^{m-1}+\cdots+a_1\sigma)=-a_0^{-1}(-a_0\varepsilon)=\varepsilon,\end{aligned}$$

因此，σ 可逆.

例 33 设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$的根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，求 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式和特征根.

解 $f_{\boldsymbol{B}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{A}&\lambda\boldsymbol{E}\end{vmatrix}$，由于

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{A}&\lambda\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{E}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}&\mathbf{0}\\-\boldsymbol{A}&\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\end{pmatrix},$$

故 $f_B(\lambda)=|\lambda E-B|=|\lambda E-A|\cdot|\lambda E+A|$
$$=|\lambda E-A|\cdot(-1)^n|-\lambda E-A|$$
$$=(-1)^n f_A(\lambda)f_A(-\lambda).$$
且 B 的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n,-\lambda_1,\cdots,-\lambda_n$.

例 34 设 A 为 n 阶正定矩阵,B 为 n 阶实对称矩阵,则 AB 和 BA 都与对角矩阵相似.

证明 1)由 A 正定,故∃可逆矩阵 P,使 $A=PP'$,于是 $P^{-1}ABP=P'BP$ 是 n 阶实对称矩阵,因此 $P^{-1}ABP$ 与对角形矩阵相似,即存在可逆矩阵 Q,使 $Q^{-1}(P^{-1}ABP)Q=(PQ)^{-1}AB(PQ)$为对角阵,故 AB 与对角形矩阵相似.

而 $P'BA(P')^{-1}=P'BPP'(P')^{-1}=P'BP$ 是 n 阶实对称阵,因此 $P'BA(P')^{-1}$与对角阵相似,即存在可逆矩阵 K,使 $K^{-1}(P'BA(P')^{-1})K=((P')^{-1}K)^{-1}BA(P')^{-1}K$ 为对角形,故 BA 与对角形矩阵相似.

例 35 $B=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}=A-E_n$,

其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}=\alpha\alpha',\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,求 B 的特征值.

解 $|\lambda E_n-B|=|\lambda E_n-A+E_n|=|(\lambda+1)E_n-A|=|(\lambda+1)E_n-\alpha\alpha'|$
$$=(\lambda+1)^{n-1}(\lambda+1-n),$$
故 B 的特征值为$-1(n-1$ 重)和 $n-1$.

例 36 求实对称阵 $A=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2+1&\cdots&a_1a_n+1\\a_2a_1+1&a_2^2&\cdots&a_1a_n+1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_na_1+1&a_na_2+1&\cdots&a_n^2\end{pmatrix}$的特征值,其中 $\sum_{i=1}^n a_i=\sum_{i=1}^n a_i^2=1$.

解 $A=\begin{pmatrix}a_1&1\\a_2&1\\\vdots&\vdots\\a_n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}-E_n\overset{\text{记为}}{=\!=}B'B-E_n$,

其中
$$B=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},$$

$$|\lambda E_n - A| = |\lambda E_n - B'B + E_n| = |(\lambda+1)E - B'B|$$
$$= (\lambda+1)^{n-2}|(\lambda+1)E_2 - BB'|$$
$$= (\lambda+1)^{n-2}\left|\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 0 & \lambda+1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i\\ \sum_{i=1}^n a_i & n\end{pmatrix}\right|$$
$$= (\lambda+1)^{n-2}\left|\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 0 & \lambda+1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & n\end{pmatrix}\right|$$
$$= (\lambda+1)^{n-2}\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda+1-n\end{vmatrix}$$
$$= (\lambda+1)^{n-2}[\lambda(\lambda+1-n)-1] = (\lambda+1)^{n-2}(\lambda^2-(n-1)\lambda-1),$$

所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-2} = -1$，$\lambda_{n-1} = \dfrac{(n-1)+\sqrt{n^2-2n+5}}{2}$，$\lambda_n = \dfrac{(n-1)-\sqrt{n^2-2n+5}}{2}$.

例 37 设 $A\in C^{n\times n}$，$\alpha\in C^n$，α 是复数域上的 n 维列向量，若 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha$ 线性无关，λ_0是 A 的任一特征值，则 V_{λ_0}是一维的.

证明 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha$ 是 C^n的一组基，

$$(A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^n\alpha) = (\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha)\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & k_1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & k_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & k_n\end{pmatrix}$$
$$= (\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha)\begin{pmatrix}\mathbf{0} & k_1\\ E_{n-1} & K\end{pmatrix}.$$

令 $P = (\alpha, A\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha)\in C^{n\times n}$，$P$ 可逆，则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & k_1\\ E_{n-1} & K\end{pmatrix} = T$，即 A 与 T 相似. 故 $|\lambda_0 E - A| = |\lambda_0 E - T|$，由于 $|\lambda_0 E - A| = 0$，且 $\lambda_0 E - T$ 有一 $n-1$ 阶子式不为 0，故秩$(\lambda_0 E - T) = n-1$，由于 $\lambda_0 E - T = \lambda_0 E - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda_0 E - A)P$，故秩$(\lambda_0 E - A) =$ 秩$(\lambda_0 E - T) = n-1$，所以维$(V_{\lambda_0}) = 1$.

例 38 设 C 为复数域，$A, B\in C^{n\times n}$，且 $AB = BA$. 证明，存在 n 阶可逆矩阵 G，使 $G^{-1}AG$ 和 $G^{-1}BG$ 同时为上三角形.

证明 对 A, B 的阶数 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶矩阵成立，下证对阶为 n 的矩阵结论也成立.

由 $AB=BA$，故 A,B 有公共的特征向量 α，不妨设 $A\alpha=\lambda_1\alpha$，$B\alpha=\mu_1\alpha$，$\alpha\neq 0$，将 α 扩充为 $\mathbf{C}^n$ 的一组基 $\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$（均为列向量）. 设

$$A(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(A\alpha,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$B(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(B\alpha,B\alpha_2,\cdots,B\alpha_n)=(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\mu_1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}. \quad (2)$$

由 $AB=BA$，故 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}$，于是 $A_1B_1=B_1A_1$.

由归纳假设，存在 $n-1$ 阶可逆矩阵 Q 使

$$Q^{-1}A_1Q=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad Q^{-1}B_1Q=\begin{pmatrix}\mu_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix},$$

令 $P=(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，由(1)，(2)两式，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix},\quad P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\mu_1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix},$$

令 $G=P\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix}$，则

$$G^{-1}AG=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad G^{-1}BG=\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix}.$$

例 39 设 P 为数域，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in P^n$，$a_i\neq 0$，$i=1,\cdots,n$，则

1) 若 $B=\alpha'\alpha$，则对 $\forall\, m\in\mathbf{N}$，$\exists\, k\in P$，使 $B^m=kB$；

2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}BP$ 为对角形.

证明 1) 对 $\forall\, m\in\mathbf{N}$，$B^m=(\alpha'\alpha)(\alpha'\alpha)\cdots(\alpha'\alpha)=\alpha'[(\alpha\alpha')\cdots(\alpha\alpha')]\alpha=k(\alpha'\alpha)=kB$，其中，$k=(\alpha\alpha')^{m-1}$.

2) 由 $B=\alpha'\alpha$，则 $\mathrm{r}(B)=1$，$|\lambda E-B|=|\lambda E-\alpha'\alpha|=\lambda^{n-1}|\lambda-\alpha\alpha'|=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)$，故 B 的所有互不相同的特征值是 0（$n-1$ 重），$\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

由于 $B\alpha'=\alpha'(\alpha\alpha')=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\alpha'$，$(\alpha\neq 0)$，故 $\beta_1=\alpha'$ 是 B 的属于特征值 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ 的特征向量. 易知

$$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-a_2\\a_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-a_3\\0\\a_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n=\begin{pmatrix}-a_n\\0\\\vdots\\0\\a_1\end{pmatrix}$$

是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 0 的特征向量，且 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关. 由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 也线性无关，

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

例 40 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V 的一组基. σ 为 V 的一个线性变换，且在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为一个若尔当块，证明：

1) V 中含 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 的 σ 的不变子空间只有 V 本身；

2) V 中 σ 的任一非零不变子空间必含 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$；

3) V 不能分解成 σ 的两个非平凡子空间的直和.

证明 1) 设 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}$，

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{pmatrix}$ 为一若尔当块.

设 V^* 为 σ 的任一不变子空间，且 $\boldsymbol{\varepsilon}_1\in V^*$，则 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)\in V^*$，由于 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$，故 $\boldsymbol{\varepsilon}_2\in V^*$，同理有 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\in V^*$，因此，$V^*=V$.

2) 设 W 为 σ 的任一非零不变子空间，$\boldsymbol{\xi}\in W$，$\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，设 $\boldsymbol{\xi}=\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$，由于 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 不全为 0，不妨设 k_t 是第一个不为 0 的数，

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\xi})&=\sum_{i=1}^{n}k_i\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\sum_{i=1}^{n-1}k_i(\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})+k_n\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_n\\&=\lambda\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\varepsilon}_i+\sum_{j=1}^{n-1}k_j\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}=\lambda\boldsymbol{\xi}+\sum_{j=1}^{n-1}k_j\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}.\end{aligned}$$

由于 $\xi,\sigma(\xi)\in W$，因而 $\sum_{j=1}^{n-1}k_j\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}\in W$，令 $\xi_1=\sum_{j=1}^{n-1}k_j\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}$，$\sigma(\xi_1)=\lambda\xi_1+\sum_{i=1}^{n-2}k_i\boldsymbol{\varepsilon}_{i+2}\in W$，令 $\xi_2=\sum_{i=1}^{n-2}k_i\boldsymbol{\varepsilon}_{i+2}\in W$，$\sigma(\xi_2)=\lambda\xi_2+\sum_{i=1}^{n-3}k_i\boldsymbol{\varepsilon}_{i+3}\in W$. 设 $\xi_3=\sum_{i=1}^{n-3}k_i\boldsymbol{\varepsilon}_{i+3}\in W$，如此继续，则有 $\xi_{n-t}=\sum_{i=1}^{t}k_i\boldsymbol{\varepsilon}_{i+(n-t)}=\sum_{i=1}^{t}k_i\boldsymbol{\varepsilon}_n\in W$，由于 $k_1=\cdots=k_{t-1}=0$，故 $\xi_{n-t}=k_t\boldsymbol{\varepsilon}_n$，由 $k_t\neq0$，故 $\boldsymbol{\varepsilon}_n\in W$.

3) 设 V_1,V_2 是 σ 的两个非平凡的子空间，由 2)，$\boldsymbol{\varepsilon}_n\in V_1\cap V_2$，故和 V_1+V_2 不是直和，故 V 不能分解成 σ 的两个非平凡子空间的直和.

§7.3 习　　题

1. 在 P^3 中，给出一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,0,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-1,0)$，定义如下 σ：$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=(-5,0,3)$，$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=(0,-1,6)$，$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=(-5,-1,9)$.

1) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 和基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵；

2) 求 σ 的值域与核.

2. 在 P^4 中，对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in P^4$，令

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=(-x_2+x_3-x_4,x_1-x_3+x_4,-x_1+x_2,x_1-x_2).$$

1) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,1)$ 下的矩阵；

2) 令 $\xi=(3,-1,2,5)$，求在 $\sigma(\xi)$ 基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标；

3) 求 σ 的值域与核.

3. 在 $P^{2\times2}$ 中，给定矩阵 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，对 $\forall\,\boldsymbol{X}\in P^{2\times2}$，定义 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 如下：

$$\sigma_1(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\sigma_2(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\boldsymbol{X},\sigma_3(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

求 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

4. 在 P^3 中，设线性变换 σ：

$$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(2x_2,x_1-x_3,x_2+x_3).$$

1) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$ 下的矩阵；

2) 设 $\xi=(2,2,-1)$，求 $\sigma(\xi)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标；

3) σ 是否可逆？若可逆，求 σ^{-1}.

5. 在复数域 $\mathbf{C}$ 上，求下列矩阵的特征值和特征向量，并判断是否与对角形

矩阵相似,若与对角形矩阵相似,求可逆矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角形.

1) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;　　2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;　　4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{pmatrix}$.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是数域 P 上的 4 维线性空间 V 的一组基,线性变换 σ 在这组基下的矩阵为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) 求 σ 的特征值和特征向量;

2) 求 V 的一组基,使 σ 在这组基下的矩阵为对角形,并写出这个对角形矩阵;

3) 求 σ 的值域与核.

7. 在 $P[x]_n$ 中 $(n>1)$, σ 表示求导变换,证明 σ 在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

8. 设 σ 为数域 P 上线性空间 V 的线性变换,证明

1) 设 λ_1,λ_2是 σ 的两个不同的特征值, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量,则 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$不是 σ 的特征向量;

2) σ 可逆的充要条件是 σ 无 0 特征值;

3) 若 σ 可逆,则 σ 与 σ^{-1}有完全相同的特征向量,并且若 λ_1是 σ 的特征值,则 λ_1^{-1}是 σ^{-1}的特征值.

9. 设 V 是数域 P 上的 $n(>1)$维线性空间,线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

证明:1) $\boldsymbol{A}$ 不与对角矩阵相似;

2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 属于 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间 W,则 $W=V$;

3) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 属于 σ 的任意非零不变子空间;

4) V 不能分解成两个非平凡不变子空间的直和.

10. 设 σ,τ 是线性空间 V 上的线性变换,若 $\sigma\tau-\tau\sigma=\epsilon$($V$ 的恒等变换),证明

$$\sigma^k\tau-\tau\sigma^k=k\sigma^{k-1},\ k>1.$$

11. 证明数域 P 上 n 维线性空间 V 的任一子空间 W 必为某一线性变换的核.

12. 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换,证明

1) $\sigma(V)\supseteq\sigma^2(V)\supseteq\sigma^3(V)\supseteq\cdots$;

2) $\sigma^{-1}(\mathbf{0})\subseteq(\sigma^2)^{-1}(\mathbf{0})\subseteq(\sigma^3)^{-1}(\mathbf{0})\subseteq\cdots$;

3) $\sigma(V)\subseteq\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 的充要条件是 $\sigma^2=0$.

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基,σ 是 V 的线性变换,使 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{\eta}_i$,$i=1,\cdots,n$,证明 σ 在这两组基下的矩阵相同.

14. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都为 n 阶正定矩阵,证明,

1) $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的根都大于零;

2) $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的所有根等于 1 的充要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

15. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵,证明

1) $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值;

2) $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

16. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 P 上的两个 n 阶可逆方阵,若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,证明,$\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}^*$ 也相似($\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵).设 $\lambda_1,\cdots\lambda_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 所有互异的特征值,求出 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有互异的特征值.

17. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间,σ 是 V 的线性变换,证明 σ 可表示为可逆线性变换与恒等线性变换之积.

18. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间,σ 是 V 的线性变换,且 $\sigma^2=\sigma$.证明,

1) σ 的特征值是 0 或 1;

2) $V=V_1\dot{+}V_0$,V_1 和 V_0 是分别属于 1 和 0 的特征子空间.

19. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间,σ 是 V 的线性变换,且在 P 中有 n 个互异的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,设 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,证明,$\boldsymbol{\alpha},\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_i$,$\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 σ 的属于特征值 λ_i 的特征向量.

§7.4 习题答案与提示

1. σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 和基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵分别是 $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5 & 20 & -20\\ -4 & -5 & -2\\ 27 & 18 & 24\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. 1) σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

2) $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标为 $(-2,4,0,4)$.

3) $\sigma(V)=L(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3))$,

$\sigma^{-1}(\mathbf{0})=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$, $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1,0)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(-1,-1,0,1)$.

3. $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵分别是

$$\begin{pmatrix}a & c & 0 & 0\\ b & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & c\\ 0 & 0 & b & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix}a^2 & ac & ab & bc\\ ab & ad & b^2 & bd\\ ac & c^2 & ad & cd\\ cb & cd & bd & d^2\end{pmatrix}.$$

4. 1) σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix}-7 & 5 & -7\\ 11 & -5 & 9\\ 16 & -7 & 13\end{pmatrix}$.

2) $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(-2,6,9)'$.

3) σ 可逆，$\sigma^{-1}(x_1,x_2,x_3)=\left(-\frac{1}{2}x_1+x_2+x_3,\frac{1}{2}x_1,-\frac{1}{2}x_1+x_3\right)$.

5. 1) 特征值为 2(2 重),0,$\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量不是 3 个,故 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似.

2) 特征值为 2(2 重), $-1+\sqrt{3}$, $-1-\sqrt{3}$, $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3) 特征值为 1,2,9, $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} & \frac{62}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{3}\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

4) 特征值为 3(2 重),1, $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量不是 3 个,故 $\boldsymbol{A}$ 不与对角阵相似.

6. 1) 特征值为 0(2 重),1(2 重).

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$,故 σ 的属于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$,故 σ 的属于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

2) 令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4$,则 σ 在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的矩阵为对角形 $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

3) $\sigma(V)=L(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, $\quad\sigma^{-1}(\mathbf{0})=L(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

7. 考虑求导变换将次数为 $k(>0)$ 的多项式变为 $k-1$ 次的.

8. 由线性变换的特征值和特征向量的定义及性质容易证明.

9. 1) 利用相似矩阵有相同的特征值证明.

2) 注意到 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=a\boldsymbol{\alpha}_1$, $\quad\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+a\boldsymbol{\alpha}_i, i>1$.

3) 设 U 是 σ 的任一非零不变子空间, $\exists\,\boldsymbol{\beta}\in U,\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$,设 $\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i$,且设 $k_t\neq 0$、$k_s=0, s>t$,即有 $\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{t}k_i\boldsymbol{\alpha}_i$,对于 $\sigma(\boldsymbol{\beta})$,证 $k_2\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_{t-1}\in W$,进而 $k_3\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_{t-2}\in W,\cdots,k_t\boldsymbol{\alpha}_1\in W$,由 $k_t\neq 0,\boldsymbol{\alpha}_1\in W$.

10. 对 k 用数学归纳法.

11. 若 $W\neq\{\mathbf{0}\}$,取 W 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,可以定义一个线性变换满足条件.

12. 由定义易证.

13. 利用$(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}$,证$\sigma(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{A}$.

14. 1) 证存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$,由 $\boldsymbol{B}$ 正定,$\lambda_i>0$,再由$|\boldsymbol{P}'|\cdot|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{P}|=\left|\lambda\boldsymbol{E}-\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\right|$可得.

2) 由 1)易得.

15. 1) 对$\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$施行初等变换可得.

2) 利用 1)的结果.

16. 利用 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 的关系可得.

17. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$为基,$\sigma$ 在这组基下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$,$\exists$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$. 当 $r=0$ 时,正确. 若 $r\neq0$,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{PQ})\left[\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}\right]$,进而可证明所要的结果.

18. 1) 由定义证明.

2) $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\alpha}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})-(\sigma-\varepsilon)\boldsymbol{\alpha},\sigma(\boldsymbol{\alpha})\in V_1,-(\sigma-\varepsilon)\boldsymbol{\alpha}\in V_0$.

19. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$分别为$\sigma$ 的属于特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的特征向量,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$也是 V 的基. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i$,若 $k_i\neq0$,$k_i\boldsymbol{\alpha}_i$是λ_i的特征向量,$i=1,\cdots,n$;若$\exists\, k_i=0$,不妨设 $k_1,\cdots,k_r\neq0$,而 $k_{r+1}=\cdots=k_n=0$,则 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$.

$$(\boldsymbol{\alpha},\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}))=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r)\begin{pmatrix}k_1 & k_1\lambda_1 & \cdots & k_1\lambda_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k_r & k_r\lambda_r & \cdots & k_r\lambda_r^{n-1}\end{pmatrix}.$$

因为 $r<n$,矛盾.

反之,$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为基,将 $\boldsymbol{\alpha},\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\sigma^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$表示.

第八章　λ－矩阵

§8.1　基本知识

一、λ－矩阵

1．设 P 是一个数域，λ 是一个文字，若 $\boldsymbol{A}(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{n\times m}$，$a_{ij}(\lambda)\in P[\lambda]$，则称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 为 P 上的 λ－矩阵.

2．若 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中有一个 $r(r\geqslant 1)$ 阶子式不为零多项式，而所有 $r+1$ 阶子式(如果有的话)全为零多项式，则称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩为 r. 零矩阵的秩规定为零.

3．一个 $n\times n$ 的 λ－矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 称为可逆的，如果有一个 $n\times n$ 的 λ－矩阵 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 使

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{E},$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，称 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda)$.

4．一个 $n\times n$ 的 λ－矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是可逆的充分必要条件为行列式 $|\boldsymbol{A}(\lambda)|$ 是 P 中一个非零数.

二、λ－矩阵的等价标准形

1．下面的三种变换叫做 λ－矩阵的初等变换：

1) 矩阵的两行(列)互换位置；

2) 矩阵的某一行(列)乘以数域 P 中一个非零的常数 c；

3) 矩阵的某一行(列)加另一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍，$\varphi(\lambda)$ 是 P 上一个多项式.

注 1°　交换 i,j 两行(列)，相当于左(右)乘换法初等矩阵 $\boldsymbol{P}(i,j)$.

2°　用非零常数 c 乘第 i 行(列)，相当于左(右)乘倍法初等矩阵 $\boldsymbol{P}(i(c))$.

3°　将第 j 行(i 列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到第 i 行(j 列)，相当于左(右)乘消法初等矩阵 $\boldsymbol{P}(i,j(\varphi))$.

2．λ－矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 称为与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价，如果可以经过一系列初等变换将 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 化为 $\boldsymbol{B}(\lambda)$.

3．两个 $s\times n$ 的 λ－矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价的充分必要条件为，有一个 $s\times s$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}(\lambda)$ 与一个 $n\times n$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$，使

$$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda).$$

4. 任意一个非零的 $s\times n$ 的λ－矩阵 $A(\lambda)$都等价于下列形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r\geqslant 1, d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$是首项系数为 1 的多项式，且

$$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,r-1).$$

这个矩阵称为 $A(\lambda)$的标准形.

三、行列式因子与不变因子

1. 设 λ－矩阵 $A(\lambda)$的秩为 r，对于正整数 k，$1\leqslant k\leqslant r$，$A(\lambda)$中必有非零的 k 阶子式. $A(\lambda)$中全部 k 阶子式的首项系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$称为 $A(\lambda)$的 k 阶行列式因子.

2. 等价的 λ－矩阵具有相同的秩.

3. λ－矩阵 $A(\lambda)$的标准形是唯一的，标准形的主对角线上非零元素 $d_1(\lambda), d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$称为 $A(\lambda)$的不变因子.

4. 两个 λ－矩阵等价的充分必要条件是它们有相同的行列式因子，或者它们有相同的不变因子.

5. 行列式因子与不变因子之间的关系为：设 $A(\lambda)$的秩为 r，$A(\lambda)$的行列式因子为 $D_1(\lambda), D_2(\lambda),\cdots,D_r(\lambda)$，不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$，则

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)\quad (k=1,2,\cdots,r),$$

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda), d_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}\quad (k=2,3,\cdots,r).$$

四、矩阵相似的条件

1. 设 $A=(a_{ij})$是 $n\times n$ 数字矩阵，A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的不变因子简称为 A 的不变因子.

2. 设 A,B 都是数域 P 上两个 $n\times n$ 矩阵，A 与 B 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵 $\lambda E-A$ 和 $\lambda E-B$ 等价.

3. 矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们有相同的不变因子.

4. $n\times n$ 数字矩阵$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$.

五、矩阵的相似标准形

1. 有理标准形

1) 设 $f(\lambda)\in P[\lambda]$, $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$, $n\geqslant 1$, 则 n 阶方阵

$$\boldsymbol{N}_0=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1\end{pmatrix}$$

称为 $f(\lambda)$的伴侣阵或 Frobenius 块.

2) 设 n 阶方阵$\boldsymbol{A}$ 的不变因子为

$$1,\cdots,1,d_{k+1}(\lambda),d_{k+2}(\lambda),\cdots,d_n(\lambda),$$

$d_{k+i}(\lambda)$的次数大于等于 1,且 $\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2,\cdots,\boldsymbol{N}_{n-k}$ 分别是 $d_{k+1}(\lambda),d_{k+2}(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$的伴侣阵,称分块对角矩阵

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{N}_1 & & & \\ & \boldsymbol{N}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{N}_{n-k}\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形,或 Frobenius 标准形.

3) 数域 P 上 λ 的多项式 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 的伴侣阵的不变因子为 $1,\cdots,1,f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{N}_0|$.

4) 数域 P 上的任何 n 阶矩阵(在 P 上)必相似于它的有理标准形.

2. 若尔当(Jordan)标准形

1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,把矩阵 $\boldsymbol{A}$(或线性变换 $\mathscr{A}$)的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,所有这些一次因式方幂(相同的必须按出现的次数计算)称为矩阵 $\boldsymbol{A}$(或线性变换 $\mathscr{A}$)的初等因子.

2) 用初等变换化特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为对角形式,然后将主对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积,则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部初等因子.

3) 两个同阶矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

4) 每个 n 阶复数矩阵$\boldsymbol{A}$ 都相似于一个若尔当形矩阵

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i\times k_i} \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

称为若尔当块，这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被 $\boldsymbol{A}$ 唯一决定的，它称为 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形，其中主对角线上的元素 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

5) 设 $\mathscr{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换，在 V 中必定存在一组基，使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是若尔当形的，并且这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被 $\mathscr{A}$ 唯一决定的.

6) 每个 n 阶复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与一个上(或下)三角形矩阵相似，其主对角线上的元素为 A 的全部特征值.

7) 复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}$ 的初等因子全为一次的.

*六、最小多项式

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的一个 n 阶方阵，如果多项式 $f(x)\in P[x]$，使 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，则称 $f(x)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式，并且称 $f(x)$ 以 $\boldsymbol{A}$ 为根.

2. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的次数最低的首项系数为 1 的零化多项式称为 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式.

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是唯一的，记为 $m_{\boldsymbol{A}}(x)$.

4. $f(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式的充分必要条件是 $m_{\boldsymbol{A}}(x)\mid f(x)$. 特别地，$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的一个因式.

5. 相似矩阵有相同的最小多项式.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

A_i 的最小多项式为 $m_{A_i}(x), i=1,2,\cdots,s$,那么 A 的最小多项式

$$m_A(x)=[m_{A_1}(x),m_{A_2}(x),\cdots,m_{A_s}(x)].$$

7. k 阶若尔当块

$$J=\begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}$$

的最小多项式为 $(x-a)^k$.

8. 矩阵 A 的最小多项式就是 A 的最后一个不变因子 $d_n(x)$.

§8.2 例　　题

例 1 求 λ－矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

的标准形.

解 用初等变换法

$$A(\lambda)\xrightarrow[{[1+3]}]{}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}\xrightarrow{[3-1]}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[2-1(\lambda^2)][3-1(\lambda)]}]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[3+2]}]{[3(-1)]}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}.$$

例 2 求 λ－矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$$

的不变因子和标准形.

解 借助于行列式因子.当 $\beta=0$ 时,

$$D_4(\lambda)=(\lambda+\alpha)^4, D_3(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2, D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1,$$

所以不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2, d_4(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2,$$

标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (\lambda+\alpha)^2 & \\ & & & (\lambda+\alpha)^2 \end{pmatrix}.$$

当 $\beta\neq 0$ 时，

$$D_4(\lambda)=[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2, D_3(\lambda)=D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1,$$

所以不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1, d_4(\lambda)=[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2,$$

标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & [(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2 \end{pmatrix}.$$

例 3 设 $D_k(\lambda)$是 λ－矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的 k 阶行列式因子，证明：$D_k^2(\lambda)\mid D_{k+1}(\lambda)D_{k-1}(\lambda)$.

证明 $D_{k+1}(\lambda)=D_k(\lambda)d_{k+1}(\lambda)$，由 $d_k(\lambda)\mid d_{k+1}(\lambda)$知 $d_{k+1}(\lambda)=d_k(\lambda)\varphi(\lambda)$，从而

$$\begin{aligned} D_{k+1}(\lambda)D_{k-1}(\lambda) &= D_k(\lambda)d_{k+1}(\lambda)D_{k-1}(\lambda) \\ &= D_k(\lambda)D_{k-1}(\lambda)d_k(\lambda)\varphi(\lambda) \\ &= D_k^2(\lambda)\varphi(\lambda), \end{aligned}$$

故 $D_k^2(\lambda)\mid D_{k+1}(\lambda)D_{k-1}(\lambda)$.

例 4 证明

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$$

的不变因子是$\overbrace{1,1,\cdots,1}^{n-1\text{个}}, f(\lambda)$，其中 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$.

证明 将 $A(\lambda)$之第 $2,3,\cdots,n$ 行的 $\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1}$ 倍都加到第一行,就有

$$|A(\lambda)|=\begin{vmatrix}0&0&0&\cdots&0&f(\lambda)\\-1&\lambda&0&\cdots&0&a_{n-1}\\0&-1&\lambda&\cdots&0&a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&a_2\\0&0&0&\cdots&-1&\lambda+a_1\end{vmatrix}$$

$$=f(\lambda)\cdot(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{n-1}=f(\lambda).$$

于是 $D_n(\lambda)=f(\lambda)$. 在 $A(\lambda)$中划去第 1 行与第 n 列后剩下的 $n-1$ 阶子式为 $(-1)^{n-1}$,故 $D_{n-1}(\lambda)=1$,从而 $D_{n-2}(\lambda)=\cdots=D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$,所以 $A(\lambda)$ 的不变因子是

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1,d_n(\lambda)=f(\lambda).$$

点评 若 $f(\lambda)$有 n 个互不相同的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=B.$$

因 $\lambda E-A$ 等价于 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,f(\lambda))$, $\lambda E-B$ 等价于 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,f(\lambda))$,故 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价,因而 $A\sim B$.

例 5 设

$$A=\begin{pmatrix}-2&1\\0&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-10&-4\\26&11\end{pmatrix},$$

它们相似吗?

解 解法 1

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+2&-1\\0&\lambda-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda^2-\lambda-6\end{pmatrix},$$

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix}\lambda+10&4\\-26&\lambda-11\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda^2-\lambda-6\end{pmatrix},$$

所以 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价,故 $A\sim B$.

解法 2

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2+1(8)]} \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 8\lambda+16 & \lambda-11 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1(-4)]} \begin{pmatrix} -4\lambda-8 & 4 \\ 8\lambda+16 & \lambda-11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[1-2(8)]}]{} \begin{pmatrix} -4\lambda-40 & 4 \\ 104 & \lambda-11 \end{pmatrix} \xrightarrow[{[1(-1/4)]}]{} \begin{pmatrix} \lambda+10 & 4 \\ -26 & \lambda-11 \end{pmatrix} = \lambda E - B,$$

所以 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价,故 $A \sim B$.

点评 此题将相似关系转化为等价关系,相似关系难于处理,但等价关系就可以用初等变换,这样问题就变得比较具体.同时还可以求出相似变换矩阵.事实上,由上可知

$$\lambda E - B = P(\lambda E - A)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即 $\lambda E - B = P(\lambda E - A)T = \lambda PT - PAT$,于是 $PT = E$,$P = T^{-1}$,从而 $B = T^{-1}AT$.这里

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 6 设 P 是数域,$\overline{P}$ 是包含 P 的一个较大的数域,A,B 是数域 P 上两个 $n \times n$ 矩阵,若在 $\overline{P}$ 上有 $A \sim B$,则在 P 上也一定有 $A \sim B$.

证明 因 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 都是数域 P 上的 $n \times n$ 的 λ - 矩阵,它们的任一 k 阶子式都是数域 P 上的 λ 的多项式,若干个 P 上的 λ 的多项式的最大公因式不因数域扩大而改变,故 $D_k(\lambda)_A$,$D_k(\lambda)_B$ 都不因数域扩大而改变.因此 $\lambda E - A$ 或 $\lambda E - B$ 的不变因子在 $\overline{P}$ 上与在 P 上都相同.因在 $\overline{P}$ 上有 $A \sim B$,则在 $\overline{P}$ 上 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 的不变因子相同,因而在 P 上也相同,故在 P 上也有 $A \sim B$.

特别地,设 A,B 为 n 阶实矩阵,若 A 与 B 在复数域上相似,则 A 与 B 在实数域上也相似.

例 7 设 A 与 B 是数域 P 上的同阶方阵,证明 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价的充分必要条件是 A 与 B 有分解式:$A = TS$,$B = ST$,其中 T 与 S 都是数域 P 上的方阵,且其中至少有一个是可逆的.

证明 必要性.$\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价,故 A 与 B 相似,因而存在可逆矩阵 T,使 $T^{-1}AT = B$.令 $T^{-1}A = S$,则 $A = TS$,$B = ST$.

充分性.设有分解式 $A = TS$,$B = ST$,且 T 可逆,故 $S = BT^{-1}$,所以 $A = TBT^{-1}$,从而 A 相似于 B,进而 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价.

例 8 设 a,b 是实数,且 $b \neq 0$,$2n$ 阶矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
a & -b & & & & & & \\
b & a & 1 & & & & & \\
 & & a & -b & & & & \\
 & & b & a & 1 & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & a & -b \\
 & & & & & b & a
\end{pmatrix},
$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子及若尔当标准形.

解 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=[(\lambda-a)^2+b^2]^n$,故 $D_{2n}(\lambda)=[(\lambda-a)^2+b^2]^n$.

在矩阵 $\lambda E-A$ 中划去第 1 列及第 $2n$ 行所得 $2n-1$ 阶子式为 $(-1)^{n-1}b^n$,$b\neq0$,于是

$$D_{2n-1}(\lambda)=1,D_{2n-2}(\lambda)=\cdots=D_1(\lambda)=1,$$

从而,不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{2n-1}(\lambda)=1,d_{2n}(\lambda)=[(\lambda-a)^2+b^2]^n,$$

所以,初等因子为

$$(\lambda-a+b\mathrm{i})^n,(\lambda-a-b\mathrm{i})^n,$$

若尔当标准形为

$$
\begin{pmatrix}
a-b\mathrm{i} & & & & & & & \\
1 & a-b\mathrm{i} & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & a-b\mathrm{i} & & & & \\
 & & & 0 & a+b\mathrm{i} & & & \\
 & & & & 1 & a+b\mathrm{i} & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & 1 & a+b\mathrm{i}
\end{pmatrix}
$$

例 9 求矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

的若尔当标准形.

解

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

其右上角有一个 $n-1$ 阶子式为 $(-1)^{n-1}$，所以 $D_{n-1}(\lambda)=1$，从而 $d_1(\lambda)=\cdots$ $d_{n-1}(\lambda)=1$，由于

$$d_n(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}=D_n(\lambda)=|\lambda E - A|=\lambda^n-1$$
$$=(\lambda-1)(\lambda-\varepsilon)\cdots(\lambda-\varepsilon^{n-1}),$$

其中 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$. 因此 A 的若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}.$$

点评 由此题可得，$A=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{n-1} \\ 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，则 $A \sim \mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，其中 ε_1，$\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为全部 n 次单位根.

例 10 设 A 为 n 阶复矩阵，A 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E - A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

则 A 的若尔当标准形中以 λ_i 为特征值的若尔当块的个数等于 V_{λ_i} 的维数.

证明 设 A 的若尔当标准形是 J，则存在可逆矩阵 T，使

$$T^{-1}AT=J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中 J_i 是若尔当块，其阶数为 k_i，$i=1,2,\cdots,s$.

不妨设 $J_1,J_2,\cdots,J_t$ 以 λ_1 为特征值，$J_{t+1},\cdots,J_s$ 主对角线元素不是 λ_1，$k_1+k_2+\cdots+k_t=r_1$.

考虑线性方程组

$$(\lambda_1 E - A)X=\mathbf{0},$$

其解空间为 V_{λ_1}，则 $\dim V_{\lambda_1}=n-$ 秩$(\lambda_1 E - A)$. 而

$$秩(\lambda_1 E - A)=秩[T^{-1}(\lambda_1 E - A)T]=秩(\lambda_1 E - T^{-1}AT)=秩(\lambda_1 E - J),$$

$$\lambda_1 E - J = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 - J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 E_t - J_t & & & \\ & & & \lambda_1 E_{t+1} - J_{t+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_1 E_s - J_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 - J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 E_t - J_t \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{t+1} - J_{t+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 E_s - J_s \end{pmatrix},$$

B_1为主对角元素为 0 的 r_1阶矩阵,B_2为 $n - r_1$阶非退化矩阵,于是

$$\text{秩}(B_1) = r_1 - t,\text{秩}(B_2) = n - r_1$$

因而,

$$\text{秩}(\lambda_1 E - J) = \text{秩}(B_1) + \text{秩}(B_2) = n - t,$$

所以

$$\dim V_{\lambda_1} = n - \text{秩}(\lambda_1 E - A) = t.$$

同理,以 λ_i为特征值的若尔当块的个数等于 V_{λ_i} 的维数.

例 11 设 A 为 n 阶方阵,$A^k = 0$,且 k 为满足 $A^k = 0$ 的最小正整数,称 A 为 k 次幂零矩阵.证明:所有 n 阶 $n-1$ 次幂零矩阵相似.

证明 证法 1 在复数域上存在可逆矩阵 T 使

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

是一个若尔当形矩阵,其中

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i \times k_i}.$$

因 $A^{n-1} = 0$,所以

$$T^{-1}A^{n-1}T=(T^{-1}AT)^{n-1}=J^{n-1}=\begin{pmatrix} J_1^{n-1} & & & \\ & J_2^{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^{n-1} \end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

故 J_i 对角线上元素全为零，于是 $J_i^{k_i}=\mathbf{0}$ 且 $J_i^{k_i-1}\neq\mathbf{0}$. 令 $N=\max(k_1,k_2,\cdots,k_s)$，则

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}^N=\mathbf{0}.$$

于是 $A^N=\mathbf{0}$，又 $A^{N-1}\neq\mathbf{0}$，所以 $N=n-1$. 于是

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J \end{pmatrix},$$

其中 J 为 $n-1$ 阶若尔当块，且对角线上元素为零. 又因为 $\begin{pmatrix} J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J \end{pmatrix}$ 相似，因而所有 n 阶 $n-1$ 次幂零矩阵相似.

点评 幂零矩阵的特点：(1) 若尔当标准形 J 的若尔当块 J_i 为幂零若尔当块，$J_i^{k_i}=0$，$J_i^r\neq 0$，$r<k_i$，$i=1,2,\cdots,s$. (2) 若尔当标准形中主对角线上元素全为零. (3) 特征值全为零.

证法 2　设 A 为 n 阶 $n-1$ 次幂零矩阵，则

$$A^{n-1}=\mathbf{0}, A^k\neq\mathbf{0} \quad (k<n-1),$$

于是 A 的最小多项式为 $d_n(\lambda)=\lambda^{n-1}$. 因为幂零矩阵的特征值都是零，所以 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n$，而 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_{n-1}(\lambda)$ $d_n(\lambda)$，从而

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-2}(\lambda)=1, d_{n-1}(\lambda)=\lambda,$$

因而任意 n 阶 $n-1$ 次幂零矩阵都具有相同的不变因子 $1,\cdots,1,\lambda,\lambda^{n-1}$，故彼此相似.

点评 利用矩阵的最小多项式即最后一个不变因子，矩阵的特征多项式和不变因子的关系可确定各个不变因子. 从而利用不变因子是矩阵的相似不变量的特点是证明矩阵相似的一种方法.

例 12 设方阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-1)^n$，则对于任意自然数 k，A^k 都与 A 相似.

证明 A 的若尔当标准形为

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中

$$J_i=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其阶数为 $r_i, i=1,2,\cdots,s, J_i$ 的不变因子为 $1,\cdots,1,(\lambda-1)^{r_i}$,

$$|\lambda E_{r_i}-J_i^k|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & & & \\ -k & \lambda-1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & -k & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^{r_i},$$

$\lambda E_{r_i}-J_i^k$ 有一个 r_i-1 阶子式

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & & & \\ -k & \lambda-1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & -k & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^{r_i-1},$$

还有一个 r_i-1 阶子式

$$\begin{vmatrix} -k & \lambda-1 & & \\ & -k & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda-1 \\ * & & & -k \end{vmatrix}=g(\lambda),$$

因 $g(1)=(-k)^{r_i-1}\neq0$,所以 $((\lambda-1)^{r_i-1},g(\lambda))=1$,故 $\lambda E_{r_i}-J_i^k$ 的 r_i-1 阶行列式因子为 1,因此 $\lambda E_{r_i}-J_i^k$ 的不变因子为 $1,\cdots,1,(\lambda-1)^{r_i}$,所以 $J_i\sim J_i^k$,即存在 T_i,使 $T_i^{-1}J_i^kT_i=J_i$.令

$$T=\begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_s \end{pmatrix},$$

则 $T^{-1}J^kT=J$,从而 $A^k\sim A$.

点评 r_i阶若尔当块$J_i=\begin{pmatrix}1&&&\\1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{pmatrix}$,对于任意自然数$k$,均有$J_i^k\sim J_i$,故可将$A$化为若尔当标准形来证明.

例 13 复数域上的任意n阶方阵A,均等于两个对称矩阵的乘积,且其中之一是非退化的.

证明 A是复数域上的n阶方阵,则存在n阶可逆矩阵T,使

$$T^{-1}AT=J=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{pmatrix},$$

其中
$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&0&\cdots&0&0\\1&\lambda_i&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&\lambda_i\end{pmatrix}_{k_i\times k_i},i=1,2,\cdots,s.$$

作$H_i=\begin{pmatrix}&&&1\\&&1&\\&\iddots&&\\1&&&\end{pmatrix}$,$H_i$与$J_i$阶数相同,易知$J_i=H_iJ_i'H_i$,$i=1,2,\cdots,s$.

令$H=\begin{pmatrix}H_1&&&\\&H_2&&\\&&\ddots&\\&&&H_s\end{pmatrix}$,则有$H'=H^{-1}=H$,$J=HJ'H$.故

$$A=TJT^{-1}=THJ'HT^{-1}=THT'A'(T^{-1})'HT^{-1}=(THT')A'[(T^{-1})'HT^{-1}].$$

令$B=THT'$,则$A=BA'B^{-1}$.令$C=A'B^{-1}$,则$A=BC$,B非退化且

$$B'=(THT')'=TH'T'=THT'=B,$$

$$C'=(A'B^{-1})'=(B^{-1})'A=(B')^{-1}A=(B')^{-1}BA'B^{-1}=B^{-1}BA'B^{-1}=A'B^{-1}=C.$$

点评 k_i阶若尔当块$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&0&\cdots&0&0\\1&\lambda_i&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&\lambda_i\end{pmatrix}$,则存在$k_i$阶矩阵$H_i=$

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$，使 $H_i^{-1}J_iH_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}=J_i'$，且 $H_i'=H_i^{-1}=H_i$.

例 14 证明任一复矩阵 A 均可分解为 $A=B+C$，其中 C 为幂零阵，B 相似于对角形，且 $BC=CB$.

证明 存在可逆矩阵 T，使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{pmatrix},$$

其中

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

设 $B_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}$，$C_i=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}$，则

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_s\end{pmatrix}.$$

令 $B=T\begin{pmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s\end{pmatrix}T^{-1}$，$C=T\begin{pmatrix}C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_s\end{pmatrix}T^{-1}$，显然 B,C 为所求.

点评 k_i 阶若尔当块能分解为一个幂零若尔当块与一个数量矩阵之和

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix},$$

二者乘法可换.

例 15 设 M 为复数域上的可逆矩阵,则存在方阵 A 使 $A^2=M$.

证明 在复数域上存在可逆矩阵 T,使

$$T^{-1}MT=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

即是一个若尔当形矩阵,其中

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i\times k_i},\lambda_i\neq 0,i=1,2,\cdots,s.$$

设

$$B_i=\begin{pmatrix} x & & & \\ b_{21} & x & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & x \end{pmatrix},$$

令 $B_i^2=J_i$,可从上至下得到 $x^2=\lambda_i$,取 $x=\sqrt{\lambda_i}$,$2xb_{21}=1$,可得 $b_{21}=\dfrac{1}{2x}$,再求 $b_{32},b_{31},\cdots$,因而可求出 B_i 故有

$$T^{-1}MT=\begin{pmatrix} B_1^2 & & & \\ & B_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s^2 \end{pmatrix},$$

$$M=\left(T\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}T^{-1}\right)^2=A^2,$$

这里 $A=T\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}T^{-1}$.

例 16 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&-3&1\\-1&3&1&-3\\3&-1&-3&1\\-1&3&1&-3\end{pmatrix}$$

的最小多项式.

解 解法 1

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&3&-1\\1&\lambda-3&-1&3\\-3&1&\lambda+3&-1\\1&-3&-1&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^4.$$

A 的最小多项式为 $\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\lambda^4$ 之一,经验算 $m_A(\lambda)=\lambda^2$.

解法 2 $\lambda E-A$ 的不变因子为 $1,1,\lambda^2,\lambda^2$,得 $m_A(\lambda)=\lambda^2$.

解法 3 令 $B=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$,则 $A=\begin{pmatrix}B&-B\\B&-B\end{pmatrix}$,又 $A^2=0$,故 λ^2是 A 的零化多项式,但 $A\neq0$,因而 $m_A(\lambda)=\lambda^2$.

点评 求最小多项式可用上述三种方法.

例 17 设 A 是 n 阶方阵,证明:

1) A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的根相同;

2) 若 A 的特征值互异,则 $m(\lambda)=f(\lambda)$.

证明 1) 因 $m(\lambda)\mid f(\lambda)$,故 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的根是特征多项式 $f(\lambda)$ 的根.

下证 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的根一定是 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的根.

证法 1 设 λ_0 是 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的根,则存在非零向量 $\xi\in C^n$,使 $A\xi=\lambda_0\xi$. 设 $m(\lambda)=c_0+c_1\lambda+\cdots+c_k\lambda^k$,则

$$\begin{aligned}0=m(A)\xi&=(c_0E+c_1A+\cdots+c_kA^k)\xi\\&=c_0\xi+c_1\lambda_0\xi+\cdots+c_k\lambda_0^k\xi=m(\lambda_0)\xi,\end{aligned}$$

从而 $m(\lambda_0)=0$,即 λ_0是 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的根.

证法 2 因 $m(\lambda)=d_n(\lambda)$,$f(\lambda)=|\lambda E-A|=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$.

设 λ_0是 $f(\lambda)$ 的根,则 $(\lambda-\lambda_0)\mid f(\lambda)$,于是必有 i,使 $(\lambda-\lambda_0)\mid d_i(\lambda)$.

又 $d_i(\lambda)\mid d_n(\lambda)$,从而 $(\lambda-\lambda_0)\mid d_n(\lambda)$,即 $(\lambda-\lambda_0)\mid m(\lambda)$,故 λ_0为 $m(\lambda)$ 的根.

证法 3 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $m(A)$ 的特征值为 $m(\lambda_1)$, $m(\lambda_2),\cdots,m(\lambda_n)$.

而 $m(A)=0$,故 $m(A)$ 的特征值全为零,因而 $m(\lambda_i)=0$, $i=1,2,\cdots,n$,即 λ_i是 $m(\lambda)$ 的根.

证法 4　设 λ_0是 $f(\lambda)$的根,则 $f(\lambda_0)=|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

设 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)q(\lambda)+r$, r 为常数,则 $m(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})q(\boldsymbol{A})+r\boldsymbol{E}$. 由 $m(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$ 知 $r\boldsymbol{E}=-(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})q(\boldsymbol{A})$,两边取行列式,得 $r^n=0$,故 $r=0$,从而$(\lambda-\lambda_0)|m(\lambda)$,即 λ_0是 $m(\lambda)$的根.

2) 证明　若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异,则

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$互不相同,由 1)知 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=f(\lambda)$.

例 18　设 $\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$,令 $W=\{f(\boldsymbol{A})|f(x)\in P[x]\}$,

1) 证明 W 是$P^{n\times n}$的一个子空间;

2) $\dim W=\partial(m_{\boldsymbol{A}}(\lambda))$.

证明　1) $\boldsymbol{A}\in W$,故 W 是$P^{n\times n}$的非空子集.

任取 $f(\boldsymbol{A}),g(\boldsymbol{A})\in W$,其中 $f(x),g(x)\in P[x]$,则 $f(x)+g(x)\in P[x]$,从而 $f(\boldsymbol{A})+g(\boldsymbol{A})\in W$.

任取 $k\in P$, $kf(x)\in P[x]$,所以 $kf(\boldsymbol{A})\in W$,故 W 是$P^{n\times n}$的一个子空间.

2) 设 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$,则 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}$为 W 的一组基.

先证它们线性无关.否则,若存在不全为零的数 $k_0,k_1,\cdots,k_{m-1}$,使

$$k_0\boldsymbol{E}+k_1\boldsymbol{A}+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}=\boldsymbol{0},$$

这与 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$为 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式矛盾.

再任取 $f(\boldsymbol{A})\in W$,下证 $f(\boldsymbol{A})$可由 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}$线性表出.

事实上,任取 $f(\lambda)\in P[\lambda]$,存在 $q(\lambda),r(\lambda)\in P[\lambda]$,使

$$f(\lambda)=q(\lambda)m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)+r(\lambda),$$

其中 $r(\lambda)=0$ 或$\partial(r(\lambda))<\partial(m_{\boldsymbol{A}}(\lambda))$.

若 $r(\lambda)=0$,则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,当然可由 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}$线性表出.

若 $r(\lambda)\neq 0$, $\partial(r(\lambda))<m$,不妨设

$$r(\lambda)=c_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0,$$

则

$$f(\boldsymbol{A})=q(\boldsymbol{A})m_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=c_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+c_1\boldsymbol{A}+c_0\boldsymbol{E}.$$

综上可得 $\dim W=m=\partial(m_{\boldsymbol{A}}(\lambda))$.

例 19　幂零矩阵(存在 $m\geqslant 2$,使 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$,但 $\boldsymbol{A}^{m-1}\neq\boldsymbol{0}$)不可对角化.

证明　证法 1　由 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$ 知, $f(\lambda)=\lambda^m$是$\boldsymbol{A}$ 的零化多项式,于是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式形式为 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^r$,其中 $1\leqslant r\leqslant m$,但 $r=1$ 则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,与假设矛盾,因此 $r\geqslant 2$,即 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式有重根,从而幂零矩阵不可对角化.

证法 2　设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，相应的特征向量为 ξ，则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\xi}=\lambda^m\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$，必有 $\lambda^m=0,\lambda=0$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix}，其中\ \boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}_{k_i\times k_i}$$

由 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$ 有 $\boldsymbol{J}^m=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{J}_i^m=\boldsymbol{0}\ (i=1,2,\cdots,s)$.

若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，则 $\boldsymbol{J}_i=\boldsymbol{0}\ (i=1,2,\cdots,s)$，进而有 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$，必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，与假设矛盾.因此 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵.

证法 3　设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{X}$，使

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.于是

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^m=\begin{pmatrix}\lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_i^m=0,\lambda_i=0,i=1,2,\cdots,n$，从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，与题设矛盾.因而 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

例 20　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix},$$

1) 若把 $\boldsymbol{A}$ 看成有理数域上的矩阵，判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化，写出理由；

2) 若把 $\boldsymbol{A}$ 看成复数域上的矩阵，判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化，写出理由.

解　$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 2 & -3 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda^2-3\lambda+2.$$

1) 把 $\boldsymbol{A}$ 看成有理数域上的矩阵.

首先 $f(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-3\lambda+2$ 在有理数域上不可约.否则若 $f(\lambda)$ 可约，则它至少有一个一次因式，也即有一个有理根，但它的有理根只可能是 $\pm1,\pm2$，经验

算 ±1, ±2 全不是它的根,因而 $f(\lambda)$在有理数域上不可约.

因 $m_A(\lambda) \mid |\lambda E - A|$,故 A 的最小多项式就是 $f(\lambda)$,它在有理数域上不能分解成互素的一次因式的乘积,因而把 A 看成有理数域上的矩阵,A 不可对角化.

2) 把 A 看成复数域上的矩阵.

此时 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda + 2$ 是 A 的零化多项式,

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 + 2\lambda - 3,$$

由辗转相除法可得,$(f(\lambda), f'(\lambda)) = 1$,故 $f(\lambda)$在复数域中没有重根,因而 A 的最小多项式在复数域中没有重根,所以把 A 看成复数域上的矩阵,A 可对角化.

点评 利用最小多项式来判别矩阵是否可对角化是一种简便方法.

例 21 设 A 为 n 阶方阵,$f(\lambda) = |\lambda E - A|$是 A 的特征多项式,并令

$$g(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{(f(\lambda), f'(\lambda))},$$

证明:A 与一个对角矩阵相似的充要条件是 $g(A) = 0$.

证明 必要性. 由 A 与对角矩阵相似,其最小多项式 $m_A(\lambda)$无重根,且 $m_A(\lambda)$取 $f(\lambda)$的所有根. 又 $g(\lambda) = \dfrac{f(\lambda)}{(f(\lambda), f'(\lambda))}$无重根且和 $f(\lambda)$的根相同,故

$$g(\lambda) = m_A(\lambda),$$

因而 $g(A) = 0$.

充分性. 由 $g(A) = 0$知 $m_A(\lambda) \mid g(\lambda)$,从而 $m_A(\lambda)$无重根,A 与对角矩阵相似.

例 22 设 $f(\lambda)$为矩阵 A 的特征多项式,$f(\lambda) = g(\lambda)h(\lambda)$且$(g(\lambda), h(\lambda)) = 1$,求证:秩$(g(A)) = h(\lambda)$的次数,秩$(h(A)) = g(\lambda)$的次数.

证明 设 λ_0为 $f(\lambda)$的根,则

$$f(\lambda_0) = g(\lambda_0)h(\lambda_0) = 0.$$

由$(g(\lambda), h(\lambda)) = 1$ 知存在 $u(\lambda), v(\lambda)$,使

$$u(\lambda)g(\lambda) + v(\lambda)h(\lambda) = 1, \tag{1}$$

则我们断定 $g(\lambda_0), h(\lambda_0)$中只能有一个为 0,否则由(1)式可得

$$0 = u(\lambda_0)g(\lambda_0) + v(\lambda_0)h(\lambda_0) = 1,$$

矛盾. 在复数域上,A 相似于 Jordan 标准形,即存在可逆矩阵 T,使

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_t & & & \\ & & & J_{t+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_s \end{pmatrix}, J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i \times k_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, s).$$

不妨设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 为 $g(\lambda)$ 的根，其重数分别为 $k_1,\cdots,k_t$，$\lambda_{t+1},\cdots,\lambda_s$ 为 $h(\lambda)$ 的根，其重数分别为 $k_{t+1},\cdots,k_s$，因而有

$$k_1+\cdots+k_t=\partial(g(\lambda)),k_{t+1}+\cdots+k_s=\partial(h(\lambda)),$$

$$g(T^{-1}AT)=\begin{pmatrix} g(J_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & g(J_t) & & & \\ & & & g(J_{t+1}) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & g(J_s) \end{pmatrix}.$$

因为 $g(J_{t+1}),\cdots,g(J_s)$ 均为满秩矩阵，故

$$秩\left(\begin{pmatrix} g(J_{t+1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g(J_s) \end{pmatrix}\right)=秩(g(J_{t+1}))+\cdots+秩(g(J_s))$$

$$=k_{t+1}+\cdots+k_s=\partial(h(\lambda))$$

因为

$$g(J_1)=\begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & & \\ g'(\lambda_1) & g(\lambda_1) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{g^{(k_1-1)}(\lambda_1)}{(k_1-1)!} & \cdots & g'(\lambda_1) & g(\lambda_1) \end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

同理 $g(J_2)=\mathbf{0},\cdots,g(J_t)=\mathbf{0}$，故

$$秩(g(T^{-1}AT))=秩(g(A))=\partial(h(\lambda)).$$

同理可证秩$(h(A))=\partial(g(\lambda))$.

点评 相似矩阵具有相同的秩，将 A 化为与其相似的 Jordan 标准形 J，$T^{-1}AT=J$，$T^{-1}g(A)T=g(T^{-1}AT)=g(J)$ 为准对角矩阵，便于讨论秩.

例 23 设 A 为一个 n 阶复矩阵，$f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式，求证：A 可对角化的充分必要条件是，若 a 是 $f(\lambda)$ 的 k 重根，则秩$(aE-A)=n-k$.

证明 必要性.由条件可知，存在可逆矩阵 X，使

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

而 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，$a$ 是 $f(\lambda)$ 的 k 重根，因而在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中有 k 个为 a，故矩阵

$$X^{-1}(aE-A)X=\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a-\lambda_n \end{pmatrix}$$

的对角线上有 k 个为零，从而

$$\text{秩}(aE-A)=n-k.$$

充分性. 由 a 是 $f(\lambda)$ 的根，即 a 为 A 的特征值. 由条件知，存在可逆矩阵 X，使

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}, J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i\times n_i}, i=1,2,\cdots,s.$$

设 $J_1,\cdots,J_r$ 的对角线元素均为 a，而 $J_{r+1},\cdots,J_s$ 不以 a 为特征值，则

$$X^{-1}(aE-A)X=aE-X^{-1}AX=\begin{pmatrix} aE_1-J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & aE_r-J_r & & & \\ & & & aE_{r+1}-J_{r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & aE_s-J_s \end{pmatrix},$$

故秩 $(aE-A)=(n_1-1)+\cdots+(n_r-1)+n_{r+1}+\cdots+n_s=n-r=n-k$，从而

$$r=k, n_1+\cdots+n_k=k, n_1=\cdots=n_r=1.$$

由于 a 是任意的，故

$$X^{-1}AX=\text{对角形矩阵}.$$

点评 n_i 阶幂零若尔当块 $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为 n_i-1.

例 24 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

求 A^k.

解 1) 首先求 A 的 Jordan 标准形，由

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 2 & -6\\ 1 & \lambda & -3\\ 1 & 1 & \lambda-4\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{pmatrix},$$

从而 A 的初等因子为 $\lambda-1,(\lambda-1)^2$,故 A 的若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

2) 求矩阵 T,使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

设 $T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,有

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

故 $A\alpha_1=\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_3=\alpha_3$.

由 $A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3$ 得 $(E-A)\alpha_2=-\alpha_3$.

设

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},$$

则由

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -6 & -y_1\\ 1 & 1 & -3 & -y_2\\ 1 & 1 & -3 & -y_3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2 & 2 & -6 & -y_1\\ 1 & 1 & -3 & -y_2\\ 0 & 0 & 0 & y_2-y_3\end{pmatrix},$$

而 $(E-A)\alpha_2=-\alpha_3$ 有解,故 $y_2=y_3$.而 $A\alpha_3=\alpha_3$,从而 $(E-A)\alpha_3=\mathbf{0}$,故

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

即有 $y_1+y_2-3y_3=0$.结合 $y_2=y_3$,就有 $y_1=2y_2$.

令 $y_2=y_3=1$,则 $y_1=2$.故

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$,取该方程组的基础解系中另一向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}3&-1&2\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

3)由 2)得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1},$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&k&1\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}3&-1&2\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&k&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&-1&3\\0&1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1-2k&-2k&6k\\-k&1-k&3k\\-k&-k&1+3k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

点评　此问题可推广到一般情况,求矩阵 $\boldsymbol{T}$ 时应从最后一个向量求起.

矩阵的 Jordan 标准形的重要应用之一是计算矩阵的多项式,譬如,要计算 $\boldsymbol{A}^k$,其中 k 是很大的正整数,若 $\boldsymbol{A}$ 是 Jordan 标准形,用上述方法求出可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}$,那么 $\boldsymbol{A}^m=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}^{-1})^m=\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^m\boldsymbol{T}^{-1}$.每个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}(\lambda_j,t)$的方幂易于计算

$$\boldsymbol{J}(\lambda_j,t)^r=(\lambda_j\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}(0,t))^r.$$

由于 $\lambda_j\boldsymbol{E}$ 与$\boldsymbol{J}(0,t)$可交换,因此可用二项式定理展开上式右端,而当 $r\geqslant t$ 时,幂零若尔当块 $\boldsymbol{J}(0,t)^r=\boldsymbol{0}$,这表明,计算 $\boldsymbol{J}^m$ 比直接计算 $\boldsymbol{A}^m$ 要简便得多,而且一旦把 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 求出来后,对一切正整数 m,都可以计算 $\boldsymbol{A}^m$.

例 25　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶伴侣阵,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$.证明存在多项

式 $g(x)$,使 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}$.

证明 因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$,故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant 1$.

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=0$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$,取 $g(x)$为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式即可.下证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=1$ 的情形.

1) $\boldsymbol{B}$ 不为幂零矩阵,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}=\boldsymbol{J}(\text{若尔当标准形}).$$

可设

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix},\lambda_0\neq 0.$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{0}$.令 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=(a_{ij})$,则 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$,这里 $\boldsymbol{A}_1$为 $n-1$ 阶可逆矩阵.令 $m(x)$为 $\boldsymbol{A}_1$的最小多项式,由于 $\boldsymbol{A}_1$可逆,因而 $m(x)$的常数项设为 b_0,则 $b_0\neq 0$.作 $g(x)=\dfrac{\lambda_0}{b_0}m(x)$,则

$$\boldsymbol{T}^{-1}g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}=g(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})=\begin{pmatrix}g(0) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & g(\boldsymbol{A}_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT},$$

故 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}$.

2) $\boldsymbol{B}$ 为幂零矩阵,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}(\text{若尔当标准形}),\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{n_i\times n_i},\quad i=1,2,\cdots,s.$$

由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$,可设 $\lambda_i\neq 0,i=1,2,\cdots,s-1$,

$$\boldsymbol{J}_s=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}_{n_s\times n_s}.$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$,得

$$(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT})=(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})=\boldsymbol{0}.$$

令 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}=(b_{ij})_{n\times n}$,则由 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}\cdot\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$ 得

$$T^{-1}BT=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn}\end{pmatrix}.$$

又 $J\cdot T^{-1}BT=0$,故

$$T^{-1}BT=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & b_{mn}\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},b_{mn}\neq 0,m=n_1+\cdots+n_{s-1}+1<n.$$

令 $a_nJ^n+a_{n-1}J^{n-1}+\cdots+a_{n_s}J^{n_s}+a_{n_s-1}J^{n_s-1}+\cdots+a_1J=T^{-1}BT$,取 $a_{n_s-1}=b_{mn}$,$a_j=0,j=1,2,\cdots,n_s-2$,从而

$$a_nJ^n+a_{n-1}J^{n-1}+\cdots+a_{n_s}J^{n_s}+a_{n_s-1}J^{n_s-1}=T^{-1}BT,$$

得到一个非齐次线性方程组,其秩等于方程的个数,因而可解(解不唯一),从而找到 $g(x)$使 $g(A)=B$.

点评 矩阵 B 的秩为 1,B 的若尔当标准形只可能为

$$\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix},\quad 如\quad \lambda_0=\mathrm{Tr}\,B\neq 0$$

或

$$\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix},\quad 如\quad \mathrm{Tr}\,B=0.$$

由 $AB=BA$,则有 $T^{-1}AT\cdot T^{-1}BT=T^{-1}BT\cdot T^{-1}AT$,进而可由 A,B 其中之一的 Jordan 标准形确定另一矩阵,从而解决问题.

§8.3 习　　题

1. 求下列 λ－矩阵的不变因子和标准形.

1) $\begin{pmatrix}2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda\\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda\\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0\\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0\\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. 判断下列矩阵是否相似.

1) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上一个 $n\times n$ 矩阵,证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 相似.

4. 求下列矩阵的有理标准形和若尔当标准形.

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;　2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. 求数域 P 上幂等矩阵(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)的若尔当标准形.

6. 求数域 P 上对合矩阵(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$)的若尔当标准形.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$,证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=1$.

8. 证明:如果数域 P 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵,则对一切正整数 k, $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^k)=0$.

9. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为数域 P 上两个 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,又存在一个正整数 s,使 $\boldsymbol{A}^s=\boldsymbol{0}$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|$.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,求证:1) 存在正整数 k,使 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1})=\cdots=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+s})=\cdots$;

2) 存在正整数 k,而 $1\leqslant k\leqslant n$,使 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^k)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{k+1})=\cdots$.

11. 设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 r 重特征值,证明:秩$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant n-r$,秩$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^r=n-r$.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$ 的最小正整数称为 $\boldsymbol{A}$ 的幂零指数.

1) 证明:幂零指数等于其阶数的幂零矩阵都相似,且相似于

$$\boldsymbol{J}_0=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n};$$

2) 幂零指数相等的幂零矩阵能否相似?

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^n$，证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 相似.

14. $\boldsymbol{A}'$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置方阵，求 $\boldsymbol{M}$ 使 $M^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}$.

15. 设

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$$

为特征值 λ 的 n 阶若尔当块，

1) 求与 $\boldsymbol{J}$ 可换的矩阵；

2) 证明与 $\boldsymbol{J}$ 可换的矩阵必为 $\boldsymbol{J}$ 的多项式.

16. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，且 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$，$k\neq0$，证明：必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$，使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}k\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}.$$

17. 设 $\boldsymbol{N}$ 为数域 P 上的 n 阶方阵，$\boldsymbol{N}^n=\boldsymbol{0}$ 而 $\boldsymbol{N}^{n-1}\neq\boldsymbol{0}$. 证明：不存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 使 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{N}$.

18. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为 1，求它的最小多项式.

19. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2$，求 $\boldsymbol{B}$ 的最小多项式.

20. 证明：存在一个自然数 k，使 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\,\Big|\, m_{\boldsymbol{A}}^k(\lambda)$.

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\varphi(\lambda)$ 是次数 $\geqslant1$ 的多项式，求证

1) 若 $\varphi(\lambda)\mid m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$，则 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 是退化的；

2) $d(\lambda)$ 是 $\varphi(\lambda)$ 与 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的最大公因式，则

$$\mathrm{r}(d(\boldsymbol{A}))=\mathrm{r}(\varphi(\boldsymbol{A}));$$

3) $\varphi(\boldsymbol{A})$ 非退化的充分必要条件是 $(\varphi(\lambda),m_{\boldsymbol{A}}(\lambda))=1$；

4) 如 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 可逆，则 $\varphi^{-1}(\boldsymbol{A})$ 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 为周期矩阵，即有正整数 m，使 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

23. 设 V 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的线性变换，且满足 $\boldsymbol{A}^3-7\boldsymbol{A}=-6\varepsilon$，其中 ε 表示 V 上的恒等变换，判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化，写出理由.

24. 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & -9 & -12\\ 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

能否相似于对角矩阵 D? 如果可能,试求出 D,并求出使 $T^{-1}AT=D$ 的可逆矩阵 T.

25. 设 A 为 n 阶方阵,E 为 n 阶单位矩阵,且 $A^2+A=2E$,证明:$A=E$ 当且仅当 A 以 1 为特征值.

26. 已知矩阵 A 的最小多项式为 $g(x)=x^3+x^2-x-1$,

1) 求证:矩阵 A 可逆,矩阵 $A+E$ 与矩阵 $A-E$ 均不可逆;

2) 再假设 A 的特征多项式为 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$,求 A 的若尔当标准形.

27. 设 V 为数域 P 上 $n\times n$ 矩阵关于矩阵加法和数乘作成的线性空间,定义变换 $\sigma(A)=A'$,$\forall A\in V$,则 σ 为 V 上的线性变换,求 σ 的特征值,特征向量及 Jordan 标准形.

28. 设 A 是一个 n 阶方阵,且 $r(A)=r(A^2)$,则 $r(A)=r(A^3)=r(A^4)=\cdots$.

29. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 4\\ -12 & 3 & 8\\ -6 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

的三个特征根为 1,1,1,试将 A 表成 $A=TJT^{-1}$,其中 J 是 A 的若尔当标准形,T 是变换矩阵,求 J,T 和 T^{-1}.

30. 证明:如果数域 P 上的 n 阶矩阵 A 与 B 都是可对角化的,并且 A 与 B 可交换,则存在数域 P 上一个 n 阶可逆矩阵 S,使得 $S^{-1}AS$ 与 $S^{-1}BS$ 都为对角矩阵.

§8.4 习题答案与提示

1. 1) 不变因子 $1,1,1,\lambda(\lambda-1),\lambda^2(\lambda-1)$. 2) 不变因子 $1,1,1,(\lambda+2)^4$.

2. 1) 相似. 2) 不相似.

3. 提示 考虑 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-A'$ 的各级行列式因子.

4. 1) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

5. $J=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $J=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix}$.

7. 提示 A 的若尔当标准形主对角线上元素全为零.

8. 提示　利用幂零矩阵的若尔当标准形的特点.

9. 提示　1) $|B|\neq 0$ 时,因 $AB=BA$,有 $B^{-1}A=AB^{-1}$,从而$(B^{-1}A)^s=0$,即 $B^{-1}A$ 为幂零矩阵,故$|B+A|=|B|\left|E+B^{-1}A\right|=|B|$.

2) $|B|=0$ 时,令 $B_1=B+tE$,则 $AB_1=B_1A$.

10. 提示　2) 将 A 化为若尔当标准形,主对角线元素为 0 的幂零若尔当块放在一起.

11. 提示　将 A 化为若尔当标准形J,则有 $T^{-1}(\lambda_0E-A)T=\lambda_0E-J$.取适当的 T,使 $\lambda_0E-J=\begin{pmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{pmatrix}$,其中 B_1为主对角线元素为 0 的 r 阶子块矩阵,$B_1^r=0$,B_2是 $n-r$ 阶非退化子块.

12. 提示　1) 用最小多项式,不变因子相同.

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$幂零指数一样,但不相似.

13. 提示　利用若尔当标准形.

14. 提示　将 A 化为若尔当标准形,利用矩阵 $H_i=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$.

15. 提示　设 $E_0=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$,则 $J=\lambda E+E_0$. A 与J 可换,则有 $AE_0=E_0A$.

16. 提示　将 A 化为若尔当标准形,比较 $T^{-1}A^2T$ 与$kT^{-1}AT$.

17. 提示　利用最小多项式和若尔当标准形.

18. $m_A(\lambda)=\lambda^2-n\lambda$.

19. $m_B(\lambda)=(\lambda+4)(\lambda+6)(\lambda+12)$.

20. 提示　用例 17 的结论..

22. 提示　可用最小多项式和若尔当标准形两种方法.

23. 提示　考虑 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式.

24. 提示　考虑 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式.

25. 提示　充分性用最小多项式.

26. 提示　2) $d_5(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$,

$d_4(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)$,

$d_3(\lambda)=d_2(\lambda)=d_1(\lambda)=1$.

27. 提示　$\sigma^2=\boldsymbol{E}$, σ 为对合变换,特征值为 1 和 -1, σ 的属于 1 的特征向量是对称矩阵,属于 -1 的特征向量是反对称矩阵,若尔当标准形

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{\frac{n(n+1)}{2}} & \\ & -\boldsymbol{E}_{\frac{n(n-1)}{2}}\end{pmatrix}_{n^2\times n^2}.$$

28. 提示　利用 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形,分 $\boldsymbol{A}$ 可逆和 $\boldsymbol{A}$ 不可逆两种情况考虑.

29. $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&1&1\\6&7&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}7&-1&-5\\-6&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T}$ 不唯一.

30. 提示　设 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,其中 λ_i 的重数为 n_i, $i=1,2,\cdots,s$,于是有 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}\{\lambda_1\boldsymbol{E}_{n_1},\cdots,\lambda_s\boldsymbol{E}_{n_s}\}$,令 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$,然后利用最小多项式的性质.

第九章　欧几里得空间

§9.1　基 本 知 识

一、内积与欧氏空间：

1. 定义：设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，在 V 上定义了一个二元实函数，称为内积，记作$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，它具有以下性质：$\forall\ \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$，$\forall\ k\in\mathbf{R}$，

1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$；

2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；

3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$；

4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$时$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

V 称为欧几里得(Euclid)空间.

2. 内积的性质：$\forall\ \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$，$\forall\ k\in\mathbf{R}$，

1) $(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；

2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$.

二、长度、夹角、正交

1. 定义

1) 设 V 是欧氏空间，对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度，记为 $|\boldsymbol{\alpha}|$. 长度为 1 的向量称为单位向量. 当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时，向量$\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个单位向量，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的单位化.

2) 非零向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$规定为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|},\quad 0\leqslant\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\leqslant\pi.$$

3) 如果$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，那么 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 称为正交或垂直，记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

2. 长度的基本性质：设 V 是欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，$k\in\mathbf{R}$，则：

1) $|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时$|\boldsymbol{\alpha}|=0$(非负性)；

2) $|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|$(齐次性)；

3) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$（三角不等式）；

4) 当 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ 时，$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2$（勾股定理）.

3. 柯西－布涅柯夫斯基(Cauchy-Буняковский)不等式：对于欧氏空间中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，有 $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$. 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时，等号成立.

三、度量矩阵

1. 定义：设 V 是 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基. 设 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=a_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots,n$，矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 称为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的度量矩阵.

2. 主要结论

设 V 是 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基，$\boldsymbol{A}=((\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j))_{n\times n}$ 为基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的度量矩阵，则

1) 度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

2) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in V$，在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标分别是 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{xAy}'$.

3) 度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的.

4) 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的另一组基，$\boldsymbol{B}=((\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\eta}_j))$ 为基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的度量矩阵，且 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{AC}$，即不同基的度量矩阵是合同的，且合同变换矩阵是两个基之间的过渡矩阵.

四、标准正交基

1. 定义：欧氏空间 V 中一组非零的向量，如是它们两两正交，就称为一个正交向量组. 在 n 维欧氏空间中，由 n 个向量组成的正交向量组称为正交基；由单位向量组成的正交基称为标准正交基.

2. 施密特(Schmidt)正交化法：设 V 是欧氏空间，由 V 中一组线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 构造正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_3$ 为

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_{i-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{i-1},\boldsymbol{\beta}_{i-1})}\boldsymbol{\beta}_{i-1} \quad (i=2,\cdots,s).$$

3. 主要结论

1) n 维欧氏空间的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是标准正交基 $\Leftrightarrow$ 它的度量矩阵为单位矩阵.

2) n 维欧氏空间 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $((\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_1),(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_n))$，即 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{\varepsilon}_n$.

3) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维欧氏空间 V 中的两个向量，在标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标分别是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+$

$\cdots + x_n y_n$.

4) n 维欧氏空间 V 中任一个正交向量组都可扩充成一组正交基;任一个正交单位向量组都可扩充成一组标准正交基.

5) 对于 n 维欧氏空间中任意一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 都可以找到一组标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 使 $L(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) = L(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)$.

6) 由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵;反之,若两组基之间的过渡矩阵是正交矩阵且其中一组基是标准正交基,则另一组也是标准正交基.

五、正交子空间与子空间的正交补

1. 定义

1) 设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 中两个子空间,如果对于任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1, \boldsymbol{\beta} \in V_2$,恒有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$,则称 V_1, V_2 为正交的,记为 $V_1 \perp V_2$.

2) 如果对于任意的 $\boldsymbol{\beta} \in V_1$,总有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$,称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 V_1 正交,记为 $\boldsymbol{\alpha} \perp V_1$.

3) 子空间 V_2 称为子空间 V_1 的一个正交补,若 $V_1 \perp V_2$,且 $V_1 + V_2 = V$.

2. 主要结论

1) 如果子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 两两正交,那么和 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 是直和.

2) 欧氏空间 V 的每一个子空间 V_1 都有唯一的正交补 $V_1^{\perp}$,维(V_1)+维$(V_1^{\perp}) = n$.且 $V_1^{\perp}$ 恰由所有与 V_1 正交的向量组成.

3) 由 $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$,$V$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可唯一地分解成 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_1^{\perp}$,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在子空间 V_1 上的内射影.

4) 可用下面的方法找出 $V_1^{\perp}$ 的一组正交基以及 V 中一个向量在 V_1 上的内射影.

若 $V_1 = V$,则 $V_1^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$;若 $V_1 = \{\boldsymbol{0}\}$,则 $V_1^{\perp} = V$.

若 $V_1 \neq \{0\}, V_1 \neq V$,取 V_1 的一组正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_m (0 < m < n)$,把它扩充成 V 的一组正交基:$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_m, \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$,则子空间 $L(\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{m+2}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 就是 V_1 的正交补.

设 $\boldsymbol{\alpha} \in V$,将 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的线性组合.

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + k_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + k_{m+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1} + \cdots + k_n \boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

则 $k_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + k_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + k_m \boldsymbol{\varepsilon}_m$ 就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 V_1 上的内射影.

六、正交变换与对称变换

1. 定义

1) 欧氏空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 称为正交变换，如果它保持向量的内积不变，即对于任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，都有 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

2) 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的一个线性变换，如果对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，都有 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})$，则称 $\mathscr{A}$ 为对称变换.

2. 主要结论

1) 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的一个线性变换，以下四个命题相互等价：

1° $\mathscr{A}$ 是正交变换；

2° $\mathscr{A}$ 上保持向量的长度不变，即对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$|\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\alpha}|$；

3° 如果 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是标准正交基，那么 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 也是标准正交基.

4° $\mathscr{A}$ 在任何一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

2) 正交变换是可逆的；正交变换的乘积与正交变换的逆变换还是正交变换. 正交变换的行列式等于 $+1$ 或 -1. 行列式等于 $+1$ 的正交变换通常称为旋转，或称第一类正交变换；行列式等于 -1 的正交变换的称为第二类正交变换.

3) 对称变换在任意标准正交基下的矩阵是对称矩阵，反之亦然.

4) 设 $\mathscr{A}$ 是对称变换，V_1 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，则 $V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

5) 实对称矩阵的特征根都是实数，在 $\mathbf{R}^n$ 中属于不同特征值的特征向量两两正交.

七、欧氏空间的同构

1. 定义：实数域 $\mathbf{R}$ 上欧氏空间 V 与 V' 称为同构的，如果由 V 到 V' 有一个双射 σ，适合：1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，3) $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，这里 $\alpha,\beta\in V,k\in\mathbf{R}$. 这样的映射 σ 称为 V 到 V' 的同构映射.

2. 两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是维数相同. n 维欧氏空间都与 $\mathbf{R}^n$ 同构.

八、向量到子空间的距离，最小二乘法

1. 定义

1) 长度 $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离，记为 $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

2) 实系数线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s-b_1=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s-b_2=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{ns}x_s-b_n=0\end{cases}$$

可能无解，即任何一组实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都可能使

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{is}x_s-b_i)^2 \tag{1}$$

不等于零，我们设法找实数组 $x_1^\circ,x_2^\circ,\cdots,x_s^\circ$ 使(1)最小，这样的 $x_1^\circ,x_2^\circ,\cdots,x_s^\circ$ 称为方程组的最小二乘解.这种问题就叫做最小二乘法问题.

2. 距离的三条基本性质

1) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

2) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 时等号才成立;

3) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\leqslant d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+d(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$(三角不等式).

向量到子空间各向量的距离以垂线最短.

*九、酉空间

1. 定义

设 V 是复数域上的线性空间，在 V 中定义了一个二元复函数，称为内积，记作$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，它具有以下性质:

1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\overline{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}$，这里$\overline{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}$是$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$的共轭复数;

2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$;

4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$是非负实数，且$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

这里是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是 V 中任意的向量，k 为任意复数，这样的线性空间称为酉空间.

2. 相关的结论

1) $(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})=\bar{k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$;

3) 对 n 阶复矩阵$\boldsymbol{A}$，用 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 表示以$\boldsymbol{A}$ 的元素的共轭复数作元素的矩阵.如果 $\boldsymbol{A}$ 满足$\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{E}$，就叫酉矩阵，它的行列式的绝对值等于1;

4) 两组标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵;

5) 酉空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$，如果满足.$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$就称为 V 的一个酉变换.酉变换在标准正交基下的矩阵是酉矩阵;

6) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足$\overline{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{A}$，则叫埃尔米特(Hermite)矩阵.在酉空间 $\mathbf{C}^n$ 中令

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

则$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})$，$\mathscr{A}$是对称变换；

7) V 是酉空间，V_1是子空间，$V_1^{\perp}$是 V_1 的正交补，则 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$. 又设 V_1是对称变换的不变子空间，则 $V_1^{\perp}$也是不变子空间；

8) 埃尔米特矩阵的特征值为实数，它的属于不同特征值的特征向量正交；

9) 若 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵，则有酉矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是对角形矩阵.

§9.2 例　　题

例 1　设 $\mathbf{A}=(a_{ij})$是一个 n 阶正定矩阵，而

$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，在 $\mathbf{R}^n$中定义内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}'.$$

1) 证明在这个定义之下，$\mathbf{R}^n$成一欧氏空间；

2) 求单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$的度量矩阵；

3) 写出这个空间中的柯西－布涅柯夫斯基不等式.

解　1) 设 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^n$，$k\in\mathbf{R}$，则有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}'=(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}')'=\boldsymbol{\beta}\mathbf{A}'\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{\beta}\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}'=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha});$$

$$(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(k\boldsymbol{\alpha})\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}'=k(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}')=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}'=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}'+\boldsymbol{\beta}\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}'=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),$$

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}'=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$是正定二次型，从而$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$. 并且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$. 由此可见，$\mathbf{R}^n$在这一定义之下成为欧氏空间.

2) 设度量矩阵为 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，那么

$$b_{ij}=(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=(0,\cdots,\underset{i}{1},\cdots,0)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(j)=a_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

此即 $\boldsymbol{B}=\mathbf{A}$.

3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j}$，$|\boldsymbol{\beta}|=$

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j}$,

故柯西－布涅柯夫斯基不等式为

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j}.$$

例 2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维欧氏空间 V 中一组向量，而

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m)\\(\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m)\\\vdots & \vdots & & \vdots\\(\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{vmatrix}$$

求证：当且仅当 $|\boldsymbol{\Delta}|\neq0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，可将其扩充成为 V 的一组基：

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n.$$

由于此基的度量矩阵是正定的，从而其 m 阶顺序主子式 $|\boldsymbol{\Delta}|>0$，即有 $|\boldsymbol{\Delta}|\neq0$.

反之，设 $|\boldsymbol{\Delta}|\neq0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 假若线性相关，则其中必有一向量可由其余向量线性表示，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，则有

$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_i,k_2x_2+\cdots+k_mx_m)=k_2(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_m)\quad(i=1,2,\cdots,m)$，

这就是说，$|\boldsymbol{\Delta}|$ 的第一列可由其余 $m-1$ 列线性表示. 于是 $|\boldsymbol{\Delta}|=0$. 这与 $|\boldsymbol{\Delta}|\neq0$ 的假设矛盾. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

例 3 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是欧氏空间 V 的一个非零向量，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$ 满足条件

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha})>0(i=1,2,\cdots,m),\quad(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)\leqslant0(i,j=1,2,\cdots,m;i\neq j).$$

证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证明 设 $k\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，且假定 $k_1,\cdots,k_r\geqslant0;k_{r+1},\cdots,k_m\leqslant0$ $(1\leqslant r\leqslant m)$（否则可以重新编号，使之成立）. 令 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=-k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}-\cdots-k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，则

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,-k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}-\cdots-k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=r+1}^{m}k_i(-k_j)(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j),$$

由已知条件和假定条件知，上式右端非正，即 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\leqslant0$，但由内积的定义知 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\geqslant0$，故 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0$，从而有 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，即有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

于是

$$\mathbf{0}=(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha})=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_r(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}),$$

$$\mathbf{0}=(k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha})=k_{r+1}(\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}).$$

由已知和假定知 $k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant r)$，$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha})\leqslant 0(r+1\leqslant j\leqslant m)$．综合上面两式得 $k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha})=0(1\leqslant i\leqslant r)$，$k_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha})=0(r+1\leqslant j\leqslant m)$．从而 $k_i=0(i=1,2,\cdots,m)$．故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关．

点评 为了定义欧氏空间引入了内积的概念，使得许多与内积有关的问题，在适当地定义内积后，可迎刃而解，特别是在判定向量组的线性相关性方面，更有其优越性．

例 4 证明在一个欧氏空间里，对于任意向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，以下等式成立．

1) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2+|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=2|\boldsymbol{\alpha}|^2+2|\boldsymbol{\beta}|^2$；

2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2-\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2$.

等式 1)的几何意义是什么？

证明 1) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2+|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$
$=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=2|\boldsymbol{\alpha}|^2+2|\boldsymbol{\beta}|^2$.

2) $\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2-\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=\dfrac{1}{4}[4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

1) 的几何意义是：平行四边形对角线的平方和等于各边平方之和．

例 5 证明 n 维欧氏空间中，至多有 $n+1$ 个向量，使两两夹角都大于 90°

证明 证法 1 对 n 作归纳法．当 $n=1$ 时，在 1 维欧氏空间中结论显然成立．

假定在 $n-1$ 维欧氏空间中结论成立，下面证对 n 维欧氏空间结论也成立．

反证，若在 V 中存在 $n+2$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+2}$ 使得 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)<0(i,j=1,2,\cdots,n+2,i\neq j)$．将 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 单位化记为 $\boldsymbol{\varepsilon}$，并将其扩充成为一组标准正交基：$\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$．在这组标准正交基下，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+2}$ 的坐标分别为

$$(|\boldsymbol{\alpha}_1|,0,\cdots,0),(a_{21},\cdots,a_{2n}),\cdots,(a_{n+2,1}\cdots a_{n+2,n}).$$

$$0>(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_i)=|\boldsymbol{\alpha}_1|a_{i1},a_{i1}<0,i=2,3,\cdots,n+2.$$

设 $\boldsymbol{\beta}_i=\sum\limits_{t=2}^{n}a_{it}\boldsymbol{\varepsilon}_t(i=2,\cdots,n+2)$，则 $\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+2}$，是 $n-1$ 维欧氏空间 $L(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 的 $n+1$ 个向量．

$$0>(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{t=1}^{n}a_{it}\boldsymbol{\alpha}_{jt}=a_{i1}a_{j1}+\sum_{t=2}^{n}a_{it}a_{jt},$$

并且 $a_{i1}a_{j1}>0(i,j=2,3,\cdots,n+2,i\neq j)$，于是

$$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=\sum_{t=2}^{n}a_{it}a_{jt}<0,(i,j=2,3,\cdots,n+2),$$

与归纳假设矛盾，因而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+2}$ 不可能两两夹角都大于 90°，故对任意有

限维欧氏空间结论成立.

证法 2　对 n 作归纳法. 当 $n=1$ 时,1 维欧氏空间的任意三个向量中,必有两个向量的夹角为 0,故结论成立.

假设命题对 $n-1$ 维欧氏空间成立,下面证对 n 维欧氏空间 V 也成立. 反证,若在 V 中存在 $n+2$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+2}$,其两两夹角大于 90°,即 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)<0\,(i,j=1,2,\cdots,n+2,i\neq j)$. 记 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1)$,且将 V 分解为 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$,则 $\dim V_1^{\perp}=n-1$,此时

$$\boldsymbol{\alpha}_i=k_i\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_i\quad(\boldsymbol{\beta}_i\in V_1^{\perp};i=2,3,\cdots,n+2).$$

由 $0>(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_1)=(k_i\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\alpha}_1)=k_i(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\alpha}_1)=k_i(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)$,得 $k_i<0\,(i=2,3,\cdots,n+2)$. 又对 $i,j=2,3,\cdots,n+2$,且 $i\neq j$,有

$$0>(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(k_i\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_i,k_i\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_j)=k_ik_j(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j),$$

从而 $(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)<0\,(i,j=2,3,\cdots,n+2,i\neq j)$. 这表明在 $n-1$ 维欧氏空间 $V_1^{\perp}$ 中存在 $n+1$ 个两两夹角大于 90°的向量,与假设矛盾.

例 6　1) 证明:欧氏空间中 V 中不同基的度量矩阵是合同的;

2) 任一欧氏空间都存在标准正交基.

证明　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 分别是欧氏空间 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的度量矩阵,又设 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$.

1) 证明　由于 $\boldsymbol{\beta}_i=c_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{ni}\boldsymbol{\alpha}_n\,(i=1,2,\cdots,n)$,所以

$$b_{ij}=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=\left(\sum_{s=1}^{n}c_{si}\boldsymbol{\alpha}_s,\ \sum_{t=1}^{n}c_{tj}\boldsymbol{\alpha}_t\right)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}c_{si}c_{tj}(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_t)$$

$$=(c_{1i},c_{2i},\cdots,c_{ni})\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}c_{1j}\\c_{2j}\\\vdots\\c_{nj}\end{pmatrix},\quad\text{此即}\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}.$$

2) 在欧氏空间 V 中任取一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,它的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$因为度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的,并且正定矩阵与单位矩阵合同,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$. 令 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$,那么由 1)可知基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{E}$,这就是说 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 就是所求的标准正交基.

例 7　设 V 是 n 维欧氏空间,证明:对于任意一个 n 阶正定矩阵 $\boldsymbol{A}$,恒有 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,使得 $\boldsymbol{A}$ 为其度量矩阵.

证明　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组标准正交基,则该基的度量矩阵为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

因 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，$\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同，因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}$.

令 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 也是 V 的一组基，而且基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$.

点评 这样的基并不是唯一的，例如基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的选取不同，得到的 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$ 也不同，而它们的度量矩阵都是 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$.

例 8 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 + x_4 = 0, \\ \quad x_2 \quad\quad - x_4 = 0 \end{cases}$$

解空间的标准正交基，并求与解空间中的向量正交的向量.

解 方程组的基础解系是 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0,-1)$. Schmidt 正交化得 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0,-1)-\frac{1}{2}(1,0,1,0)=\frac{1}{2}(1,-2,-1,-2)$，再单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,-1,-2)$，则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 是解空间的标准正交基. 由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 与解空间中每个向量都正交的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与解空间的每个基向量都正交，即 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2)=0$ 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，则

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \quad = 0, \\ x_1 - x_2 \quad - x_4 = 0. \end{cases}$$

基础解系是 $(1,1,-1,0)$，$(0,1,0,-1)$，所以与解空间中每个向量都正交的向量是 $k_1(1,1,-1,0)+k_2(0,1,0,-1)$，$k_1,k_2\in\mathbf{R}$.

点评 求标准正交基的方法主要有以下两种：

1) 初等变换法 设 V 是一个 n 维欧氏空间，任取 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，求出这组基的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 是一个正定矩阵. 故由初等变换可求得可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$. 再以 $\boldsymbol{C}$ 为过渡矩阵，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 得到一组新基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$：

$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的度量矩阵就等于 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 的一组标准正交基.

2) 正交化方法 取 n 维欧氏空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，应用正交化方法得到 V 的一组正交基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，再单位化得到 V 的一组标准正交基.

一般来说用正交化方法较初等变换法简单些，因为它不涉及具体的度量矩阵.

例 9 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,s)$是 s 个 n 维实向量. $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, V_2是实系数线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\qquad(*)$$

的解空间,证明在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中 V_2是 V_1的正交补.

证明 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$是 V_2的一组基,即为方程组(*)的一个基础解系,则$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,t)$与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$都正交,因此,$\boldsymbol{\beta}_i\in V_1^{\perp}$, $V_2\subseteq V_1^{\perp}$, $\forall\boldsymbol{\xi}\in V_1^{\perp}$,有$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha}_i)=0(i=1,2,\cdots,s)$.

故 $\boldsymbol{\xi}$ 是线性方程组(1)的解,即 $\boldsymbol{\xi}\in V_2$,因此 $V_1^{\perp}\subseteq V_2$,故 $V_2=V_1^{\perp}$.

例 10 设 V_1,V_2是 n 维欧氏空间 V 的两个子空间,证明:

1) $(V_1^{\perp})^{\perp}=V_1$;

2) 若 $V_1\subseteq V_2$,那么 $V_2^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}$;

3) $(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$;

4) $(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

证明 1) 易见 $V_1\subseteq(V_1^{\perp})^{\perp}$.另一方面,设 $\boldsymbol{\alpha}\in(V_1^{\perp})^{\perp}$,令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1$, $\boldsymbol{\beta}_1\in V_1^{\perp}$,则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1),$$

得$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=0$,从而 $\boldsymbol{\beta}_1=0$,即有 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1$,因此$(V_1^{\perp})^{\perp}\subseteq V_1$,于是得$(V_1^{\perp})^{\perp}=V_1$.

2) $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V_2^{\perp}$则$(\boldsymbol{\alpha},V_2)=0$.因为 $V_1\subseteq V_2$,所以$(\boldsymbol{\alpha},V_1)=0$,即 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}$,故 $V_2^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}$.

3) $\forall\boldsymbol{\alpha}\in(V_1+V_2)^{\perp}$,则 $\boldsymbol{\alpha}\perp(V_1+V_2)$.因为 $V_1\subseteq V_1+V_2$, $V_2\subseteq V_1+V_2$,所以 $\boldsymbol{\alpha}\perp V_1$且 $\boldsymbol{\alpha}\perp V_2$,于是 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.因此$(V_1+V_2)^{\perp}\subseteq V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

另一方面,若 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$,即 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}$且 $\boldsymbol{\alpha}\in V_2^{\perp}$,从而 $\boldsymbol{\alpha}\perp V_1$且 $\boldsymbol{\alpha}\perp V_2$,但 V_1+V_2中任意向量 $\boldsymbol{\beta}$ 都可以表示成:$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2$.

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2)=0,$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}\perp(V_1+V_2)$,即 $\boldsymbol{\alpha}\in(V_1+V_2)^{\perp}$.故 $V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}\subseteq(V_1+V_2)^{\perp}$.3)得证.

4) 由 3)得$(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})^{\perp}=(V_1^{\perp})^{\perp}\cap(V_2^{\perp})^{\perp}=V_1\cap V_2$.再两边取正交补,便得证.

例 11 证明:如果 $\mathscr{A}$ 是正交变换,那么 $\mathscr{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证明 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的一个正交变换，V 的子空间 V_1 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证法 1 因为 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$，分别取 V_1 及 $V_1^{\perp}$ 的标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 及 $\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m,\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组标准正交基，因 $\mathscr{A}$ 是正交变换，故 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_m,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1},\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 仍是 V 的一组标准正交基. 由于 V_1 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，所以 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i\in V_1(i=1,2,\cdots,m)$，且 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 仍为 V_1 的基，从而 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1},\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n\in V_1^{\perp}$.

于是，任取 $\boldsymbol{\alpha}=k_{m+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1}+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n\in V_1^{\perp}$ 有 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=k_{m+1}\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1}+\cdots+k_n\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n\in V_1^{\perp}$. 故 $V_1^{\perp}$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证法 2 已知 V_1 对 $\mathscr{A}$ 不变，$V_1^{\perp}$ 是 V_1 的正交补，所以 $\mathscr{A}$ 也是 V_1 的一个线性变换，且也是一一变换. 因为 V_1 是有限维的，所以 $\mathscr{A}$ 也是 V_1 的满射变换，从而对 V_1 中任意 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{y}\in V_1$，使 $\mathscr{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$. $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}$，则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{y})=0$，于是

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{y})=0,$$

即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 与 V_1 中任意向量正交，所以 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}$，即 $V_1^{\perp}$ 对 $\mathscr{A}$ 不变.

证法 3 因为 V_1 是正交变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，所以 $\mathscr{A}|_{V_1}$ 是 V_1 的正交变换，因而也是可逆的，从而对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V_1$，有 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$ 使得 $\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$. 这样 $\forall\,\boldsymbol{\gamma}\in V_1^{\perp}$ 就有

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=0,$$

即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}$ 与 V_1 中任意向量正交，故 $\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}\in V_1^{\perp}$，$V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

点评 该结论只适用于有限维欧氏空间，在无限维欧氏空间中并不成立.

例如 $V=\mathbf{R}[x]$，$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，$g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j$. 定义内积

$(f,g)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ib_i$（当 $m\leqslant n$），显然 $\mathscr{A}(f(x))=xf(x)$ 是 V 的一个正交变换.

$$V_1=\{a_1x_1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\mid a_i\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}\}$$

是 $\mathscr{A}$ 的一个不变子空间，$V_1^{\perp}=\{a\mid a\in\mathbf{R}\}$，而 $\mathscr{A}V_1^{\perp}\neq V_1^{\perp}$，即 $V_1^{\perp}$ 不是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

例 12 欧氏空间 V 的变换：$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}$（$\boldsymbol{\eta}$ 是取定的单位向量）. 证明

1) $\mathscr{A}$ 是正交变换（这样的正交变换称为镜面反射），又是对称变换；

2) $\mathscr{A}$ 是第二类正交变换（在标准正交基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=-1$）；

3) 如果 n 维欧氏空间中，正交变换 $\mathscr{A}$ 以 1 作为一个特征值，且属于特征值的特征子空间 V_1 的维数为 $n-1$，那么 $\mathscr{A}$ 是镜面反射.

证明 1) 显然 $\mathscr{A}$ 是线性变换. 因 $(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})=1$，

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta}-2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta})$$

$=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta})-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta})+4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，即 $\mathscr{A}$ 是正交变换．又有 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta})$，

$$(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}-2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}),$$

可见 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})$，故 $\mathscr{A}$ 是对称变换．

2) 由于 $\boldsymbol{\eta}$ 是单位向量，将它扩充为 V 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，

$\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\eta}$，$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i-2(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\varepsilon}_i\ (i=2,3,\cdots,n)$，这样

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\eta},\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于 -1，所以 $\mathscr{A}$ 是第二类正交变换．

3) $\mathscr{A}$ 的特征值有 n 个，现有 $n-1$ 个为 1，另一个也为实数，设为 λ_0，那么存在一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，使得 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\lambda_0\boldsymbol{\varepsilon}_1\quad \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i\quad (i=2,\cdots,n)$．

因为 $\mathscr{A}$ 是正交变换，因此 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1)=(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\lambda_0^2(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1)$，$\lambda_0^2=1$．但 V_1 是 $n-1$ 维的，所以 $\lambda_0=-1$，于是 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=-\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i\quad (i=2,3,\cdots,n)$．

因为 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为实对称矩阵，那么 V 中属于它的不同特征值的特征向量必正交，所以 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_i)=0\quad (i=2,3,\cdots,n)$．

令 $\boldsymbol{\eta}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}\boldsymbol{\varepsilon}_1$，则 $\boldsymbol{\eta}$ 是与 $\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 正交的单位向量，并且 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 组成一组基．

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}=\mathscr{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}\boldsymbol{\varepsilon}_1\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}(-\boldsymbol{\varepsilon}_1)=-\boldsymbol{\eta}.$$

对任意 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\eta}+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n\in V$，有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})=(k_1\boldsymbol{\eta}+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\eta})=k_1$，故

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}&=k_1\mathscr{A}\boldsymbol{\eta}+k_2\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n=-k_1\boldsymbol{\eta}+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n\\&=k_1\boldsymbol{\eta}+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n-2k_1\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}.\end{aligned}$$

即 $\mathscr{A}$ 为镜面反射．

例 13 证明

1) 设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 的一个线性变换．那么 $\mathscr{A}$ 是正交变换的充要条件是 $\mathscr{A}$ 保持任意两向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离不变，即 $|\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$．

2) 正交变换的特征值等于 1 或者 -1．

证明 1) 设 $\mathscr{A}$ 为正交变换，则显然 $\mathscr{A}$ 保持向量长度不变．反之，设对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$

$\in V$,有$|\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$,则取$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$便有$|\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\alpha}|$,即$\mathscr{A}$保持向量长度不变,$\mathscr{A}$为正交变换.

2) 设$\mathscr{A}$是正交变换,λ是它的特征值,即有$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}),$$

但$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\neq 0$,所以$\lambda^2=1$,即$\lambda=\pm 1$.

例 14 设$\mathscr{A}$是欧氏空间V的一个变换.证明:如果$\mathscr{A}$保持内积不变,即对$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,那么它是线性变换,因而是正交变换.

证明 由内积的定义

$$\begin{aligned}&(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-l\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-l\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})\\
&=(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}))-2k(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})-2l(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})\\
&\quad+k^2(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})+l^2(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})+2kl(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})\\
&=(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta},k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-2k(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})-2l(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+k^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+l^2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\
&\quad+2kl(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\
&=k^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+l^2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+2kl(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-2k^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-2kl(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-2kl(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\
&\quad-2l^2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+k^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+l^2(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+2kl(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,\end{aligned}$$

得$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})-k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}-l\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=0$即$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})=k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+l\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$,因而$\mathscr{A}$是线性的.又保持内积不变,故$\mathscr{A}$是正交变换.

例 15 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$是$n$维欧氏空间中两个向量组,证明存在一个正交变换$\mathscr{A}$,使$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,m)$的充要条件为

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j),i,j=1,2,\cdots,m.$$

证明 必要性.设有正交变换$\mathscr{A}$,使$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$,

则
$$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i,\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)(i,j=1,2,\cdots,m).$$

充分性.设条件成立.令$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,$V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$,且

$$V=V_1\oplus V_1^{\perp}=V_2\oplus V_2^{\perp}.$$作V_1到V_2的映射φ_1如下:

$$\varphi_1(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m.$$

由条件可推出φ_1为V_1到V_2的一个同构映射.于是V_1与V_2的维数相同.

又由于子空间与其正交补的和为直和,故$V_1^{\perp}$与$V_2^{\perp}$的维数也相同,从而同构.设φ_2是$V_1^{\perp}$与$V_2^{\perp}$间的一个同构映射,并设$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_1'$,$\boldsymbol{\gamma}_1\in V_1$,$\boldsymbol{\gamma}_1'\in V_1^{\perp}$为$V$中任一向量,令$\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}=\varphi_1\boldsymbol{\gamma}_1+\varphi_2\boldsymbol{\gamma}_1'$,可以验算,$\mathscr{A}$是$V$的一个线性变换,且保持向量内积不变,故为$V$的正交变换.特别是由于$\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+\mathbf{0}$,故$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\varphi_1\boldsymbol{\alpha}_i+\varphi_2\mathbf{0}=\boldsymbol{\beta}_i,i=1,2,\cdots,m$.

例 16 设$\mathscr{A}$是n维欧氏空间V的一个线性变换.证明,如果$\mathscr{A}$满足下列三个条件中的任意两个,那么它必然满足第三个:1) $\mathscr{A}$是正交变换;2) $\mathscr{A}$是对称变

换;3) $\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$(恒等变换).

证明 设$\mathscr{A}$关于某个标准正交基的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.那么:$\mathscr{A}$是正交变换$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$是正交矩阵;$\mathscr{A}$是对称变换$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵;$\mathscr{A}^2=\mathscr{E}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$.

1),2)$\Rightarrow$3):$\mathscr{A}$是正交变换又是对称变换.$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,因而 $\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$.

1),3)$\Rightarrow$2):$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}$,$\mathscr{A}$是对称变换.

2),3)$\Rightarrow$1):$\mathscr{A}$是对称变换,故 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,$\mathscr{A}$是正交变换.

例 17 设 V 是n 维欧氏空间,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 满足$|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|$,$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}$,证明存在 V 上的正交变换 $\mathscr{A}$,使 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

证明 由 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}$是一个单位向量.对$\forall\,\boldsymbol{\gamma}\in V$,令 $\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}-2(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon}$,则 $\mathscr{A}$是一个镜面反射,因而是一个正交变换.由$|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|$,$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$,因此有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}&=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\alpha}-2\left(\boldsymbol{\alpha},\frac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}\\&=\boldsymbol{\alpha}-\frac{2}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\\&=\boldsymbol{\alpha}-\frac{2}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})}[(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})](\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\\&=\boldsymbol{\alpha}-\frac{2}{2[(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]}[(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})](\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

例 18 设 n 维欧氏空间 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的度量矩阵为 G,V 的线性变换 $\mathscr{A}$在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,证明:

1) 若 $\mathscr{A}$是正交变换,则 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}$;

2) 若 $\mathscr{A}$是对称变换,则 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$.

证明 由题设知 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{G}=((\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j))_{n\times n}$,如果设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{G}=(g_{ij})_{n\times n}$,$g_{ij}=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$,$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i=a_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{\alpha}_n\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

1) 证法 1 由于 $\mathscr{A}$是正交变换,所以

$$\begin{aligned}g_{ij}&=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i,\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_j)=\left(\sum_{s=1}^n a_{si}\boldsymbol{\alpha}_s,\ \sum_{t=1}^n a_{tj}\boldsymbol{\alpha}_t\right)\\&=\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n a_{si}a_{tj}(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_t)=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})\boldsymbol{G}\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故有 $G = A'GA$.

证法 2　由 $\mathscr{A}$ 是正交变换知 $\mathscr{A}$ 可逆，所以，$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 也是 V 的一组基. 再由 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_j) = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)$ 知，基 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 的度量矩阵也是 $\boldsymbol{G}$，又从基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，因此就有 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}$.

2) 由于 $\mathscr{A}$ 是对称变换，所以 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = (\boldsymbol{\alpha}_i, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_j)$，即 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_j\right) = \left(\boldsymbol{\alpha}_i, \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{\alpha}_k\right)$，于是 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_i a_k) a_{kj}$，即 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} g_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} g_{ik}\boldsymbol{\alpha}_{kj}$，也即

$(a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})(g_{1j}, g_{2j}, \cdots, g_{nj})' = (g_{i1}, g_{i2}, \cdots, g_{in})(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})'$，故有 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$.

例 19　欧氏空间 V 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 称为反对称的，如果对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 都有

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}).$$

证明：1) 对有限维欧氏空间 V 来说，线性变换 $\mathscr{A}$ 为反对称的充要条件是，$\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵为反对称矩阵；

2) 如果 V_1 是反对称变换的不变子空间，则 $V_1^{\perp}$ 也是.

证明　1) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V 的一组标准正交基，且 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 令 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为 V 中任意向量，且

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

$$\boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + y_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

则它们在该基下的坐标分别是 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$, $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$ 在该基下的坐标分别为 AX 与 AY，于是有：

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}, (\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}.$$

比较上两式知 $\mathscr{A}$ 是反对称变换，即 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta})$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}'(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}$，亦即有 $\boldsymbol{A}' = -\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵. 即 $\mathscr{A}$ 为反对称变换.

2) 设子空间 V_1 对反对称变换 $\mathscr{A}$ 不变，$\boldsymbol{\alpha}$ 为正交补 $V_1^{\perp}$ 中的任一向量，$\boldsymbol{\beta}$ 为 V_1 中的任一向量，则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\beta} \in V_1$，且 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = 0$，即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 与 V_1 中任意向量正交，故 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \in V_1^{\perp}$，即 $V_1^{\perp}$ 对 $\mathscr{A}$ 也不变.

例 20　V 与 V' 是两个 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 是 V 到 V' 的线性映射. 证明：$\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 到 V' 的同构映射的充要条件是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的度量矩阵相同.

证明　必要性. 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 到 V' 的同构映射. 则 $\forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. 所以 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_j) = (\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j)$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$. 因而 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与

$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$的度量矩阵相同.

充分性.若 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的度量矩阵相同,则$(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_j)=(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j),i,j=1,2,\cdots,n$. $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$,则

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})&=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i,\ \sum_{i=1}^{n}b_i\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i\right)=\sum_{i,j}a_ib_j(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_j)\\&=\sum_{i,j}a_ib_j(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\varepsilon}_i,\ \sum_{i=1}^{n}b_i\boldsymbol{\varepsilon}_i\right)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}).\end{aligned}$$

因此 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 到 V'的同构映射.

例 21 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换,证明 $\mathscr{A}$ 是对称变换的充要条件是 $\mathscr{A}$ 有 n 个两两正交的特征向量.

证明 必要性.因为 $\mathscr{A}$ 是对称变换,则存在 V 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 使得 $\mathscr{A}$ 关于此基的矩阵为对角形,即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_i(i=1,2,\cdots,n)$.所以 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 都是 $\mathscr{A}$ 的特征向量;又因它们两两正交,故 $\mathscr{A}$ 有 n 个两两正交的特征向量.

充分性.设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\mathscr{A}$ 的 n 个两两正交的特征向量,它们分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$.

令 $\boldsymbol{\varepsilon}_i=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_i}{|\boldsymbol{\alpha}_i|}(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V 的一组标准正交基,由于 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}_i|}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\dfrac{\lambda_i}{|\boldsymbol{\alpha}_i|}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\left(\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_i}{|\boldsymbol{\alpha}_i|}\right)=\lambda_i\boldsymbol{\varepsilon}_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$,所以 $\mathscr{A}$ 关于标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的矩阵为实对角形矩阵,从而也是实对称矩阵,故 $\mathscr{A}$ 为对称变换.

例 22 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 为欧氏空间 V 的两组向量.证明:如果

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)\quad(i,j=1,2,\cdots,m),$$

则子空间

$$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\text{与 }V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$$

同构.

证明 令 $\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m$,下面证明 σ 是 V_1 到 V_2

的一个同构映射. 首先,设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m, \tag{1}$$

则$(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$,但根据$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)$,得

$$\begin{aligned}&((k_1-l_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\beta}_m,(k_1-l_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\beta}_m)\\=&((k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\alpha}_m,(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\alpha}_m)\\=&(\mathbf{0},\mathbf{0})=0,\end{aligned}$$

所以$(k_1-l_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$. 故

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{\beta}_m, \tag{2}$$

即 σ 为 V_1到 V_2的一个映射且显然是满射.

反之由(2)也可以推出(1),即 σ 为 V_1到 V_2上的一一映射.

其次,若 $k\in\mathbf{R},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1$,可以推出 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$,

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

即 σ 为 V_1到 V_2的一个同构映射.

例 23 证明酉矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模为 1,且 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量彼此正交.

证明 设酉矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的变换是酉变换 $\mathscr{A}$,λ 是它的特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是属于λ 的特征向量,则由 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\bar{\lambda}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$. 而$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\neq0$,于是 $\lambda\bar{\lambda}=1$. 即 λ 的模为 1.

设 λ,μ 是$\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,$\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于λ 和μ 的特征向量,于是从 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Ay}=\mu\boldsymbol{y}$ 得 $\bar{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{y}=\bar{\boldsymbol{X}}'(\bar{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\overline{(\boldsymbol{AX})}'(\boldsymbol{Ay})=\bar{\lambda}\mu\bar{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{y}$,即$(\bar{\lambda}\mu-1)\bar{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{y}=0$,但$(\bar{\lambda}\mu-1)\lambda=\lambda\bar{\lambda}\mu-\lambda=|\lambda|^2\mu-\lambda=\mu-\lambda\neq0$,故 $\bar{\lambda}\mu-1\neq0$,因而 $\bar{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y})=0$,即 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量正交.

例 24 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶可逆复矩阵,证明 $\boldsymbol{A}$ 可以分解成$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UT}$,其中 $\boldsymbol{U}$ 是酉矩阵,$\boldsymbol{T}$ 是一个上三角形矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&\cdots&t_{1n}\\0&t_{22}&\cdots&t_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&t_{nn}\end{pmatrix},$$

其中对角线元素 $t_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$都是正实数,并证明这个分解是唯一的.

证明 $\boldsymbol{A}$ 为n 阶可逆复矩阵,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$\boldsymbol{A}$ 的列向量,它们线性无关,因而组成酉空间 $\mathbf{C}^n$ 的一组基. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$标准正交化得到标准正交基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1 = x_{11}\boldsymbol{\alpha}_1, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = x_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + x_{22}\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = x_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + x_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,\end{cases}$$

且每个 x_{ii} 为正实数.

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}, \text{其中 } \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,则显然 $\boldsymbol{U}$ 为酉矩阵,$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{X}^{-1}$ 也是上三角形矩阵,且对角线元素亦为正实数,由 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{AX}$ 得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UX}^{-1}=\boldsymbol{UT}$.

下证分解唯一性.假设又有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{T}_1$,$\boldsymbol{U}_1$ 为酉矩阵,$\boldsymbol{T}_1$ 为对角线上元素都是正实数的上三角形矩阵,则由 $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{UT}$,得

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{TT}_1^{-1}. \tag{1}$$

在(1)式左端,显然是酉矩阵,(1)右端为上三角形矩阵,将(1)式转置共轭,左端化为其逆,右端也化为其逆,但这时化为下三角形矩阵,因上三角形矩阵之逆仍为上三角形矩阵,因而(1)必为对角形矩阵,(1)的左端为酉矩阵,由上例,对角元素模为 1,$\boldsymbol{TT}_1^{-1}$ 的对角元素为正实数,故对角元素皆为 1,即(1)等于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,于是 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{TT}_1^{-1}=\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_1$,$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1$.唯一性得证.

例 25 证明埃尔米特矩阵的特征值是实数,且不同特征值的特征向量相互正交.

证明 设埃尔米特矩阵 $\boldsymbol{A}$ 确定的对称变换是 $\mathscr{A}$,λ 为它的一个特征值,则有非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,使 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,因此

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\alpha})=\bar{\lambda}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}).$$

但是$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})>0$,所以 $\lambda=\bar{\lambda}$,即 λ 是实数.

如果 λ,μ 是$\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是分别属于它们的特征向量,$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,$\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=\mu\boldsymbol{\beta}$,则 $\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mu\boldsymbol{\beta})=\bar{\mu}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

但实数 $\lambda\neq\bar{\mu}=\mu$,$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

例 26 设 $\mathscr{A}$ 是酉空间 V 的线性变换,则 $\mathscr{A}$ 是酉变换的充要条件是

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \quad (\forall\, \boldsymbol{\alpha}\in V).$$

证明 必要性.显然.

充分性.由条件,$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$,$\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,即 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})+(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})+(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})+(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})+$

$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$，也即

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})+(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}). \qquad (1)$$

将 $\boldsymbol{\alpha}$ 换成 $\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}$，得 $\mathrm{i}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})-\mathrm{i}(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=\mathrm{i}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-\mathrm{i}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$，即

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})-(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}). \qquad (2)$$

由(1)和(2)得$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\ \forall\ \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，故 $\mathscr{A}$ 是酉变换.

§9.3 习　　题

1. 设 $\alpha=(a_1,a_2)$，$\beta=(b_1,b_2)$为二维实空间 $\mathbf{R}^2$ 中的任意两个向量. 问：$\mathbf{R}^2$ 对以下所规定的内积是否构成欧氏空间？

1) $(\alpha,\beta)=a_1b_2+a_2b_1$；

2) $(\alpha,\beta)=(a_1+a_2)b_1+(a_1+2a_2)b_2$；

3) $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+1$；

4) $(\alpha,\beta)=a_1b_1-a_2b_2$；

5) $(\alpha,\beta)=3a_1b_1+5a_2b_2$.

2. 在 $\mathbf{R}^n$ 中设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$\mathbf{R}^n$ 对如下定义的内积是否构成欧氏空间：

1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2b_i^2}$；

2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}b_j\right)$；

3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum\limits_{i=1}^{n}k_ia_ib_i$，其中 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$；

4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}'$，其中 $\mathbf{A}$ 是 n 阶正定矩阵.

3. 证明：在任意非零欧氏空间 V 中存在向量 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{\beta}_1$，使$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)>0$，也同时存在向量 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{\beta}_2$，使$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)<0$.

4. 在实线性空间 $\mathbf{C}[-1,1]$中定义内积为：

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

求向量：$f_1(x)=1$，$f_2(x)=x$，$f_3(x)=1-x$，所构成的三角形的三个内角.

5. 证明不等式

$$|x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n|\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2},$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$为任意实数.

6. 在 $\mathbf{R}^4$ 中，求 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ （内积按通常定义），设

1) $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3,2)$, $\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2,1)$;

2) $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,2,3)$, $\boldsymbol{\beta}=(3,1,5,1)$;

3) $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,2)$, $\boldsymbol{\beta}=(3,1,-1,0)$.

7. n 维欧氏空间 V 中向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的内积记为$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$\mathscr{A}$ 为 V 的线性变换，若规定二元函数$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\mathscr{A}\boldsymbol{x},\mathscr{A}\boldsymbol{y})$，问$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是否为内积?

8. 在 $\mathbf{R}^4$ 中 $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离，证明：$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\leqslant d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是欧氏空间 V 的一组基，证明：

1) 如果 $\boldsymbol{\gamma}\in V$ 使$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_i)=0$，$i=1,2,\cdots,n$，那么 $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$；

2) 如果 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\in V$ 使对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，有$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})$，那么 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\gamma}_2$.

10. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是三维欧氏空间中一组标准正交基，证明：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)$$

也是一组标准正交基.

11. 设在向量空间 $\mathbf{R}^4$ 中规定内积(不一定是标准内积)后得到欧氏空间 V，且 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,1,1)$的度量矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-3&0&1\\-3&6&0&-1\\0&0&13&9\\1&-1&9&7\end{pmatrix}.$$

求基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)$，$\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)$，$\boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)$的度量矩阵.

12. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3\qquad +x_5=0\end{cases}$$

的解空间(作为 $\mathbf{R}^5$ 的子空间)的一组标准正交基.

13. 在 $\mathbf{R}[x]_4$(低于 4 次的实多项式和 0 构成的集合)中定义内积为$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$，求证 $\mathbf{R}[x]_4$ 是欧氏空间，并求它的一组标准正交基(由基 $1,x,x^2,x^3$ 出发作正交化).

14. 设 V 是一 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 是 V 中一固定向量.

1) 证明：$V_1=\{\boldsymbol{x}\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})=0,\boldsymbol{x}\in V\}$ 是 V 的一子空间；

2) 证明：V_1的维数等于 $n-1$.

15. 证明：奇数维欧氏空间中的旋转一定以 1 作为它的一个特征值.

16. 证明：第二类正交变换一定以 -1 作为它的一个特征值.

17. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$是 4 维欧氏空间 V 的一组标准正交基；$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$.

1) 求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$生成的子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$的一组标准正交基；

2) 求 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2-7\boldsymbol{\varepsilon}_3+4\boldsymbol{\varepsilon}_4$在 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$上的正射影.

18. 设实数域上的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&6&-2\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

1) 判断 $\boldsymbol{A}$ 是否为正定矩阵；

2) 设 V 是实数域上的 3 维线性空间，V 上的一个双线性函数 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，在 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}$，证明 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$是 V 的一个内积，并且求出 V 对这个内积所成的欧氏空间的一个标准正交基.

19. 已知 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的子空间 $W=L(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2)$，其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

求 $W^{\perp}$的一组标准正交基.

20. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为 n 维欧氏空间 V 的一组基，证明：这组基为标准正交基的充分必要条件是对于 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n$，有$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$.

21. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为 n 维欧氏空间 V 的一组基. 证明这组基是标准正交基的充分与必要条件是，对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{\alpha}_n$.

22. 令 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是欧氏空间 V 的一组线性无关的向量，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是由这组向量通过正交化方法所得的正交组，证明这两个向量组的格兰姆行列式相等，即

$$\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\alpha_n,\alpha_1)&(\alpha_n,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_n)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(\beta_1,\beta_1)&(\beta_1,\beta_2)&\cdots&(\beta_1,\beta_n)\\(\beta_2,\beta_1)&(\beta_2,\beta_2)&\cdots&(\beta_2,\beta_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\beta_n,\beta_1)&(\beta_n,\beta_2)&\cdots&(\beta_n,\beta_n)\end{vmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)\cdots(\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta}_n).$$

23．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是欧氏空间 V 的一个标准正交组．证明：对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，以下不等式成立：$\sum\limits_{i=1}^{m}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)^2\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|^2$．

24．证明：实系数线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,i=1,2,\cdots,n$ 有解的充分必要条件是向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$ 与齐次线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}x_j=0,i=1,2,\cdots,n$ 的解空间正交．

25．设 V_1,V_2 是 n 维欧氏空间 V 的线性子空间，且 V_1 的维数小于 V_2 的维数．证明：V_2 中必有一非零向量正交于 V_1 中一切向量．

26．记 $M_n(\mathbf{R})$ 为所有 n 阶实方阵在通常的运算下形成的向量空间．记 S 为所有 n 阶实对称方阵所构成的集合，T 为所有 n 阶实反对称方阵所构成的集合．

1）求证 S,T 都是 $M_n(\mathbf{R})$ 的子空间；

2）将 $M_n(\mathbf{R})$ 中两个元素 (a_{ij}) 和 (b_{ij}) 的内积定义为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$，这样 $M_n(\mathbf{R})$ 就成为内积空间．求证在这个内积空间中 S 和 T 互为正交补．

27．设 V 为 4 维欧氏空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 为 V 的一组标准正交基，子空间 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3$，求 $V_1^{\perp}$．

28．设 V_1 为 n 维欧氏空间 V 的子空间，$\boldsymbol{\alpha}\in V$，证明：在 V_1 中存在唯一向量 $\boldsymbol{\alpha}_0$，使 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0$ 与 V_1 中任一向量正交．

29．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为有限维欧氏空间 V 的一个标准正交组，对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，均有 $\sum\limits_{i=1}^{s}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2$，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 V 的一个基．

30．设 V 为 n 维欧氏空间．证明：如果 V_1 与 V_2 是 V 的 r 维子空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 分别为 V_1 与 V_2 的基．则有一个线性变换 $\mathscr{A}$ 使 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,r)$．且当 $\boldsymbol{\xi}\in V_1^{\perp}$ 时有 $\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}\in V_2^{\perp}$．

31．证明：如果 $\mathscr{A}$ 是对称变换，那么 $\mathscr{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间．

32．欧氏空间中保持距离不变的变换是否一定是线性变换？

33．1）设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是欧氏空间 V 中两个不同的单位向量．证明：存在一镜面反射 $\mathscr{A}$，使

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta};$$

2) 证明：n 维欧氏空间 V 中任一正交变换都可以表示成一系列镜面反射的乘积.

34. 设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 的一个变换，且对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均有 $(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})$. 问：$\mathscr{A}$ 是否必为对称变换？

35. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 级正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，证明：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

36. 已知 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，且 $\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+n\boldsymbol{\alpha}_n$，定义变换：$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_0)\boldsymbol{\alpha}_0$（$\boldsymbol{\alpha}\in V$，$k$ 为非零实数）.

1) 验证 $\mathscr{A}$ 是线性变换；

2) 求 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵 $\mathbf{A}$；

3) 证明 $\mathscr{A}$ 为正交变换的充分必要条件为：$k=-\dfrac{2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

37. 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为欧氏空间 V 的两个线性变换，且对于 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，均有

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=(\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}).$$

证明：值域 $V_1=\mathscr{A}(V)$ 与 $V_2=\mathscr{B}(V)$ 同构.

38. 设 $\mathbf{C}[t]_n$ 为复数域 $\mathbf{C}$ 上次数不超过 n 的多项式全体再添上零多项式构成的线性空间. 对 $\forall f(t),g(t)\in\mathbf{C}[t]_n$，定义 $(f(t),g(t))=\sum\limits_{i=0}^{n}f(i)\overline{g(i)}$. 证明 $(f(t),g(t))$ 为内积，从而 $\mathbf{C}[t]_n$ 为酉空间.

39. 证明：对酉空间 V 的任意元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})\leqslant(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$，且等号成立的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

40. 求下列方程组的最小二乘解

$$\begin{cases}0.81x+0.24y=0.50,\\0.65x+0.33y=0.29,\\0.71x+0.57y=0.45,\\0.17x+0.76y=0.14.\end{cases}$$

§9.4 习题答案与提示

1. 1) 不构成欧氏空间，取 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1)$，则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})<0$.

2) 构成欧氏空间.

3) 不构成欧氏空间，例如取 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，$k\neq1$，则 $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\neq k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

4) 不构成欧氏空间，例如取 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2)$ 时，则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})<0$.

5) 构成欧氏空间.

2. 1) 不是. 取 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,\cdots,0)=\boldsymbol{\beta}$，有 $(-2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\neq-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

2) 不是. 取 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,0,\cdots,0)\neq0$，有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

3）是.

4）是.

3．$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$,正实数 $k\neq 1$,$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$　$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})>0$,取 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$,则$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})<0$.

4．答$\langle f_1,f_2\rangle=\frac{\pi}{2}$;$\langle f_1,f_3\rangle=\frac{\pi}{6}$;$\langle f_2,f_3\rangle=\frac{\pi}{3}$.

5．直接利用柯－布不等式证明.

6．答:1) $\frac{\pi}{2}$.　2) $\frac{\pi}{4}$.　3) $\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{77}}$.

7．答:不一定.$\mathscr{A}=0$,对 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$.

8．提示:利用三角不等式.

9．提示:1) $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})=0$,　故 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$.

2) $(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})=0$,$(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2)=0$,故 $\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{0}$.

10．方法 1．直接验算符合定义.

方法 2．证由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵为正交矩阵.

11．答: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

12．答:解空间的一个基础解系:

$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1,0,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0,1,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,-5,0,0,1)$.

标准正交基:$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0,0)$,$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2,0)$,$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{315}}(7,-6,6,13,5)$.

13．答 $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\sqrt{6}}{2}x$,$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$,$\boldsymbol{\eta}_4=\frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3-3x)$.

14．2) 提示:把 $\boldsymbol{\alpha}$ 扩充为 V 的正交基,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$.因为$(\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\alpha})=0$,$i=2,3,\cdots,n$,所以 $\boldsymbol{\eta}_i\in V_1$,$i=2,3,\cdots,n$.$\forall\boldsymbol{\beta}_1\in V_1$,$\boldsymbol{\beta}_1$可由 $\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$线性表示,因此 $\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$是 V_1的基.

或证:把 $\boldsymbol{\alpha}$ 扩充为 V 的正交基$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$,亦即 $\boldsymbol{\eta}_i\in V_1$,$i=2,3,\cdots,n$,故 $\dim V_1\geqslant n-1$,又 $\boldsymbol{\alpha}\overline{\in}V_1$,所以 $V_1\neq V$.故 $\dim V_1=n-1$.

15．提示:设旋转在一组标准正交基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$n$ 为奇数,则 $|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|=-1$.

$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}'|=-|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\Rightarrow|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,即 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$的一个根.

16．提示:设第二类正交变换在一组标准正交基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则

$|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}'|=-|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$,因此 $|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,即 -1 是 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 的一个根.

17. 答:1) $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4)$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{210}}(4\boldsymbol{\varepsilon}_1+13\boldsymbol{\varepsilon}_3+5\boldsymbol{\varepsilon}_4)$.

2) 将 $L=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 的正交基 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$, $\boldsymbol{\beta}_2=4\boldsymbol{\varepsilon}_1+13\boldsymbol{\varepsilon}_3+5\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 扩充为 V 的一组正交基:$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$, $\boldsymbol{\beta}_2=4\boldsymbol{\varepsilon}_1+13\boldsymbol{\varepsilon}_3+5\boldsymbol{\varepsilon}_4$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\beta}_4=3\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3-5\boldsymbol{\varepsilon}_4$.

$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2-7\boldsymbol{\varepsilon}_3+4\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 在 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 上的正射影为 $\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{5}(19\boldsymbol{\varepsilon}_1-32\boldsymbol{\varepsilon}_3+5\boldsymbol{\varepsilon}_4)$.

18. 1) 是,经计算知各阶顺序主子式都大于 0.

2) 用定义验证可知 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是 V 的一个内积. 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定,故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$. 令 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为一个标准正交基.

19. 提示:设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in W^{\perp}$,则有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_1)=x_1+x_2=0,\\ (A,A_2)=\qquad x_2+x_3+x_4=0.\end{cases}$$

解之得一个基础解系 $(1,-1,1,0)$, $(1,-1,0,1)$,从而 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 是基. 正交化单位化,得 $\boldsymbol{D}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}_2=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

20. 提示:必要性显然.

充分性:$\boldsymbol{\alpha}_i=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_n$,则

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}0,当\ i\neq j,\\ 1,当\ i=j.\end{cases}$$

21. 提示:必要性 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i)=k_i$.

充分性:$\boldsymbol{\alpha}_i=0\cdot\boldsymbol{\alpha}+\cdots+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_n$,

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{\alpha}_n.$$

由于在基下的表法唯一,因此 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=1$, $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0$, $i\neq j$.

22. 提示:$\boldsymbol{\alpha}_i=t_{i1}\boldsymbol{\beta}_1+t_{i2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+t_{i,i-1}\boldsymbol{\beta}_{i-1}+\boldsymbol{\beta}_i$,

其中
$$t_{ij}=\frac{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)}.$$

23. 提示:将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 扩充成 V 的一个标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots$,

$\boldsymbol{\alpha}_n$.

$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\alpha} = k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n \boldsymbol{\alpha}_n$.

$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} k_i^2$.

$|\boldsymbol{\alpha}|^2 = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{m} k_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_i)^2$.

24．提示：设方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, (i = 1, 2, \cdots, n) \quad ①$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j = 0 \quad ②$$

的系数矩阵的行向量，令

$$V = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n),$$

则 $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j = 0$ 的解空间为 $V^{\perp}$，①有解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} \in V \Leftrightarrow (\boldsymbol{\beta}, V^{\perp}) = 0$.

25．提示：$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$，设 $\dim V_1 = S$，$\dim V_2 = t$，$s < t$，$\dim V_1^{\perp} = n - s$，令 $V_3 = V_2 \cap V_1^{\perp}$，$n \geqslant \dim(V_2 + V_1^{\perp}) = \dim V_2 + \dim V_1^{\perp} - \dim(V_2 \cap V_1^{\perp}) = t + n - s - \dim V_3$，因此 $\dim V_3 \geqslant t - s > 0$. $V_3 \neq \{\boldsymbol{0}\}$，取 $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in V_3$，则 $\boldsymbol{\alpha} \in V_2$，$\boldsymbol{\alpha} \in V_1^{\perp}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 V_1 中一切向量正交.

26．提示：利用定义证.

27．答：$V_1^{\perp} = L(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_3 = -\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\varepsilon}_4$.

28．提示：只要证存在唯一向量 $\boldsymbol{\alpha}_0 \in V_1$，使 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0 \in V_1^{\perp}$. 存在性：$V = V_1, \oplus V_1^{\perp}$，$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_0 \in V_1$，$\boldsymbol{\beta} \in V_1^{\perp}$，$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0 = \boldsymbol{\beta} \in V_1^{\perp}$.

唯一性：若还有 $\boldsymbol{\alpha}_0' \in V_1$，$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0'$ 与 V_1 中任意向量正交. $(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0') - (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0) = \boldsymbol{\alpha}_0 - \boldsymbol{\alpha}_0'$ 与 V_1 中任意向量正交，又 $\boldsymbol{\alpha}_0 - \boldsymbol{\alpha}_0' \in V_1$，$(\boldsymbol{\alpha}_0 - \boldsymbol{\alpha}_0', \boldsymbol{\alpha}_0 - \boldsymbol{\alpha}_0') = 0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_0 = \boldsymbol{\alpha}_0'$.

29．提示：令 $W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$，$V = W \oplus W^{\perp}$，只要证明 $W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$. $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{s} a_i \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta} \in W^{\perp}$，$\sum_{i=1}^{s} (a, \boldsymbol{\alpha}_i)^2 = \sum_{i=1}^{s} a_i^2$，$|\boldsymbol{\alpha}|^2 = \sum_{i=1}^{s} a_i^2 + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})$，因此 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = 0$，$\boldsymbol{\beta} = 0$.

30．提示：设 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 分别为 $V_1^{\perp}$ 与 $V_2^{\perp}$ 的基；则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r, \boldsymbol{\beta}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 都是 V 的基，定义 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}_i (i = 1, \cdots,$

n),则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{\beta}_j(j=1,\cdots,r)$,$\forall\,\boldsymbol{\xi}\in V_1^{\perp}$,$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_n$,则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\beta}_{r+1}+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\beta}_n\in V_2^{\perp}$.

31. 提示:$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V_1,\boldsymbol{\gamma}\in V_1^{\perp}$,只要证$(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma})=0$,设 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$,则 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$,于是$(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=0$.

32. 不一定. 例如定义 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}$,其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 为欧氏空间中的一固定非零向量,$\mathscr{A}$保持距离但不是线性变换,因而也不是正交变换.

33. 1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=1$,$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\eta}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}$是一个单位向量. 令 $\mathscr{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}$,则 $\mathscr{A}$ 是一个镜面反射且 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

2) 设 $\mathscr{A}$ 为 V 的任一正交变换,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 V 的一组标准正交基. 则 $\boldsymbol{\eta}_1=\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n=\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 也是 V 的一组标准正交基.

若 $\mathscr{A}$ 是恒等变换,作镜面反射 $\mathscr{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1$,则 $\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_1=-\boldsymbol{\varepsilon}_1$,$\mathscr{B}\boldsymbol{\varepsilon}_j=\boldsymbol{\varepsilon}_j$ $(j=2,3,\cdots,n)$. 此时 $\mathscr{A}=\mathscr{B}\mathscr{B}$.

若 $\mathscr{A}$ 不是恒等变换,设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1\neq\boldsymbol{\eta}_1$,则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\eta}_1$ 是两个不同的单位向量,由 1)知存在镜面反射 $\mathscr{C}_1$使 $\mathscr{C}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\eta}_1$,令 $\mathscr{C}_1\boldsymbol{\varepsilon}_j=\boldsymbol{\xi}_j$,$j=2,3,\cdots,n$,若 $\boldsymbol{\xi}_j=\boldsymbol{\eta}_j$,$j=2,3,\cdots,n$. 则 $\mathscr{A}=\mathscr{C}_1$结论成立. 否则可设 $\boldsymbol{\xi}_2\neq\boldsymbol{\eta}_2$,再作镜面反射 $\mathscr{C}_2$:$\mathscr{C}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}$,$\boldsymbol{\eta}=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\eta}_2}{|\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\eta}_2|}$,于是 $\mathscr{C}_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\eta}_2$,且 $\mathscr{C}_2\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\eta}_1$,继续下去:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\xrightarrow{\mathscr{C}_1}\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n\xrightarrow{\mathscr{C}_2}\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n\rightarrow\cdots\rightarrow\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n,$$

则 $\mathscr{A}=\mathscr{C}_s\mathscr{C}_{s-1}\cdots\mathscr{C}_2\mathscr{C}_1$.

34. 答:$\mathscr{A}$必为对称变换,因为可以证明 $\mathscr{A}$ 是线性变换:

$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}^2\boldsymbol{\beta})=(\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,

$(\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))=(\mathscr{A}^2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})$,

$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})$,

$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}))=\cdots=0$. 故 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$.

又$(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})-k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})-k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=0$,故 $\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$.

35. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'|=|\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'|$,$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AA}'+\boldsymbol{AB}'|$,$|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{BA}'+\boldsymbol{BB}'|=|(\boldsymbol{BA}'+\boldsymbol{BB}')'|=|\boldsymbol{AB}'+\boldsymbol{BB}'|$. 由 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{BB}'=\boldsymbol{E}$,$(|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$,$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

36. 1) 略.

2) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'$,其中 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,\cdots,n)'$.

3) $\mathscr{A}$ 为正交变换$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow\boldsymbol{E}+2k\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'+k^2\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow k(2+k\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'=$

$0 \Leftrightarrow 2 + k\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta} = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{2}{\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}} = -\dfrac{2}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$.

37．提示：令 $\sigma: \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \to \mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}$，则 σ 是 V_1 到 V_2 的同构映射.

若 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$，$(\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}), \mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})) = (\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}), \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})) = 0$，故 $\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{B}\boldsymbol{\beta}$，$\sigma$ 是映射且显然是满射.

若 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$，则必有 $\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathscr{B}\boldsymbol{\beta}$，$\sigma$ 是一一对应. 又可以证明保持加法、数乘、内积.

38．根据定义证明(略).

39．提示：若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，则对任意复数 t 有 $\boldsymbol{\alpha} + t\boldsymbol{\beta} \neq 0$，从而

$0 < (\boldsymbol{\alpha} + t\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} + t\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) + \bar{t}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + t(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) + t\bar{t}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})$. 取 $t = -\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})}$，代入上式得：$0 < (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$. 从而

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) < (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}).$$

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，不妨设 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$，则 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})$. 反之，若 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})$，则当 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ 时该式成立，此时 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关；当 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ 时，有 $\left(\boldsymbol{\alpha} - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})}\right) = 0$，故 $\boldsymbol{\alpha} - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$. $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

40．答：解方程组

$$\begin{cases} 0.61x + 0.94y = 0.87, \\ 0.94x + 1.07y = 0.58, \end{cases}$$

得　$x = 0.55, y = 0.06$.

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□□
□□=□□□□□ □□□ □□□ □□□□□□
□□=319
SS□=11395073
□□□□=2004□02□□1□